ППМГ „АКАД. НИКОЛА ОБРЕШКОВ“
ППМГ БУРГАС CHALLENGE

Състезание по физика, 28 май 2022 г.

Решения на темата за 9-10 клас

Задача 1. ВАХ на диодна верига.

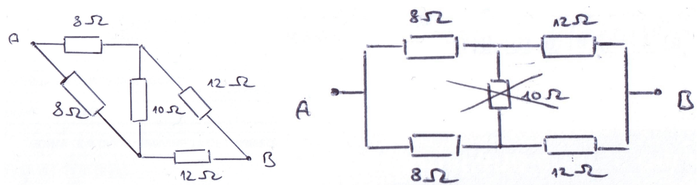
1.1. Постройте графика с оси U и I, съответно за напрежение и ток. Върху нея нанесете волт-амперните характеристики на резисторните вериги от Фиг. 2 и Фиг. 3. Отбележете върху ВАХ точките, съответстващи на ток 1 A и 2 A. **3.5 точки**

Първо намираме еквивалентните съпротивления на двете вериги. За първата

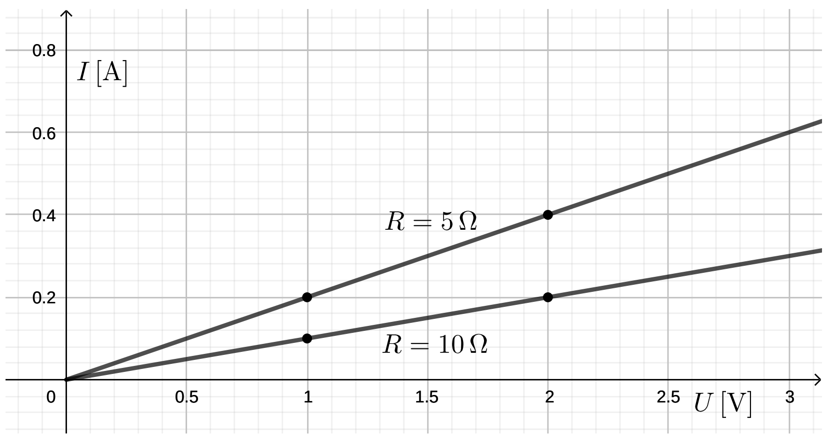
$$(5\,\Omega - 5\,\Omega) \parallel 10\,\Omega \Leftrightarrow 10\,\Omega \parallel 10\,\Omega \Leftrightarrow 5\,\Omega. \qquad \mathbf{1}$$

За втората е полезно да „разгънем“ проводниците до по-познат вид. През резистора $10\,\Omega$ не тече ток от съображения за симетрия (ако имаше ненулев ток през този резистор в едната посока, няма причина да не може да тече същият ток през резистора в другата посока – а за разпределението на токовете във верига трябва да има единствен вариант). Поради тази причина резисторът $10\,\Omega$ на практика не участва във веригата, така че тя е еквивалентна на

$$(8\,\Omega - 12\,\Omega) \parallel (8\,\Omega - 12\,\Omega) \Leftrightarrow 10\,\Omega. \qquad \mathbf{1.5}$$



Зависимостта между тока през веригите и напрежението върху тях е същата, както за резистор със съпротивление съответно $5\,\Omega$ и $10\,\Omega$. Съгласно закона на Ом, за резисторите $I = \frac{1}{R}U$, тоест ВАХ е права линия с коефициент $\frac{1}{R}$. Представяме на графика двете прави.



- За означаване на величини и мерни единици по осите – **0.2**
- За оразмеряване на осите – **0.2**
- За изобразени линейни зависимости (вкл. и при грешен наклон) – **0.2**
- За ясно отбелязване коя зависимост към коя схема се отнася – **0.2**
- За отбелязване на търсените точки при 1 V и 2 V – **0.2**

1.2. Намерете тока I_0 във веригата и напрежението U_0 върху резистора.	**2 точки**

Токът през резистора е I_0, така че напрежението върху лампата е $U - I_0R$. Токът през лампата също е I_0 и съответно $I_0 = b\sqrt{U - I_0R}$. Получаваме квадратно уравнение: **0.75**

$$\frac{1}{b^2}I_0^2 + RI_0 - U = 0.$$

След решаване и отхвърляне на отрицателния корен

$$\boxed{I_0 = \frac{1}{2}b^2\left(\sqrt{R^2 + \frac{4U}{b^2}} - R\right) = 45\,\mathrm{mA}.}$$ **1**

Тогава напрежението върху резистора е $\boxed{U_0 = I_0R = 6.75\,\mathrm{V}}$. **0.25**

1.3. Постройте графика с оси U и I, съответно за напрежение и ток. Върху нея нанесете ВАХ на веригата.	**3 точки**

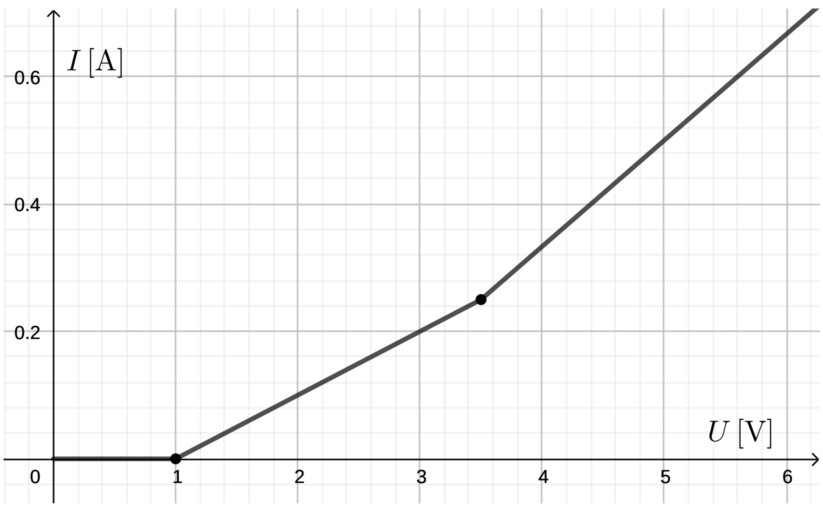
Ще изследваме поведението на веригата в зависимост от напрежението на източника, започвайки от $U = 0\,\mathrm{V}$. В началото по веригата не тече ток, защото левият диод е запушен. Когато напрежението надвиши $U_0 = 1\,\mathrm{V}$, левият диод се отпушва и ток започва да тече през R_1 и R_2, **0.25** но не и през десния диод. Заради левия диод падът на напрежението върху двата резистора е общо $U - U_0$, така че токът във веригата е

$$I = \frac{U - U_0}{R_1 + R_2}.$$ **0.5**

В такъв случай падът на напрежението при R_1 е $(U - U_0)\frac{R_1}{R_1+R_2}$. Падът между C и B тогава е $U - \left(U_0 + (U - U_0)\frac{R_1}{R_1+R_2}\right) = (U - U_0)\frac{R_2}{R_1+R_2}$. Когато той надвиши U_0, десният диод също се отпушва и ток започва да тече навсякъде по веригата. Това се случва при $U = (2+\frac{R_1}{R_2})U_0 = 3.5\,\mathrm{V}$. След този преход падът на напрежението между C и B става U_0, така че падът върху R_1 е **0.75** $U - 2U_0$, при което токът през R_1 (тоест токът във веригата) е

$$I = \frac{U - 2U_0}{R_1}.$$ **0.5**

Отбелязваме, че при отпушването на десния диод двата израза за тока във съвпадат, давайки $I = \frac{U_0}{R_2} = 0.25\,\mathrm{A}$. Остава да построим ВАХ:



- За означаване на величини и мерни единици по осите – **0.2**
- За оразмеряване на осите – **0.2**
- За правилно изобразяване на получената алгебрична зависимост (вкл. ако е грешна) – **0.6**

1.4. Определете мощността P_1, която се отделя в клона на веригата между C и B при напрежение на източника $U_1 = 5\,\mathrm{V}$. **1.5 точки**

При даденото напрежение десният диод е отпушен и през него тече ток. Падът на напрежението върху диода и върху R_2 е U_0. Токът, който се разпределя между R_2 и диода, е $I_1 = \frac{U_1 - 2U_0}{R_1} = 0.5\,\mathrm{A}$. Мощността, която общо се отделя при двата елемента (това става не само при резистора, а и при диода!), е $P_1 = U_0 I_1$. Тоест **0.5**

$$\boxed{P_1 = \frac{U_0(U_1 - 2U_0)}{R_1} = 0.5\,\mathrm{W}.}$$ **1**

Задача 2. Нагряване със зареждаема батерия.

2.1. Батерията се свързва към елемент, който консумира постоянна мощност $P = 14\,\mathrm{W}$. За какво време t_0 (в минути) ще се изтощи батерията? В тази част на задачата не отчитайте вътрешното съпротивление на батерията. **1 точка**

Тъй като $Q = Pt_0$, $t_0 = \boxed{25\,\mathrm{min.}}$ **1**

2.2. Намерете вътрешната енергия U на въздуха под буталото. **3 точки**

Буталото е в равновесие, но му действат три сили – сила на тежестта, сила от атмосферното налягане и сила от налягането на въздуха под буталото. Приравняваме:

$$pS = p_0 S + mg, \qquad p = p_0 + \frac{mg}{S}.$$ **1**

Тъй като въздухът под буталото е в топлинно равновесие с околната среда, температурата му е T_0. Обемът на въздуха е Sh. От уравнението на идеалния газ

$$\frac{p(Sh)}{T_0} = nR.$$ **0.5**

Същевременно вътрешната енергия на въздуха е

$$U = \frac{5}{2} nRT_0, \qquad U = \frac{5}{2} pSh,$$ **1**

тъй като в състава на въздуха преобладават азот и кислород, които имат двуатомни молекули. В резултат получаваме

$$\boxed{U = \frac{5}{2}(p_0 S + mg)h = 137.5\,\mathrm{kJ}.}$$ **0.5**

2.3. Определете крайното повишение на температурата в съда ΔT. **6 точки**

Нека в даден момент токът във веригата е $I(t)$. По закона на Джаул-Ленц, мощностите при вътрешното съпротивление и при консуматора са съответно I^2r и I^2R. Независимо от моментната стойност на тока, мощностите винаги се отнасят както r/R. Това означава, че и топлините, отделени при вътрешното съпротивление и консуматора, се отнасят както r/R. Топлината, която получава въздухът под буталото, съответно е $Q' = Q\frac{R}{R+r}$. Отбелязваме, че топлината при r не влияе на температурата на околната среда поради големия ѝ обем. **1.5**

След края на разреждането на батерията се установява равновесие. Нека буталото се е повдигнало с Δh, а температурата на въздуха под него се е покачила с ΔT. И в началния, и в крайния момент налягането на въздуха е p, тъй като буталото се поддържа неподвижно. Тогава от уравнението на идеалния газ

$$\frac{h}{T_0} = \frac{h+\Delta h}{T_0+\Delta T}, \qquad \frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta T}{T_0}.$$ **0.5**

Да намерим работата ΔA, извършена от газа под буталото при процеса. Работата на гравитационната сила е $-mg\Delta h$, а работата на силата от атмосферното налягане е $-p_0S\Delta h$. Работата на всички сили върху буталото в течение на процеса се равнява на изменението на кинетичната му енергия. Това изменение е нула, тъй като началната и крайната скорост на буталото е нула. Съответно

$$\Delta A - p_0S\Delta h - mg\Delta h = 0, \qquad \Delta A = pS\Delta h.$$ **1.5**

Спомняйки си формулата за работа $p\Delta V$, изведеното от нас изглежда очевидно, но приликата е само повърхностна. Ние не знаем дали термодинамичният процес е равновесен, тоест дали се случва „много бавно“. При неравновесни процеси няма изискване буталото да се поддържа в равновесие, тоест не е задължително налягането под буталото да остава равно на p в течение на процеса. То със сигурност е p само в началото и края, когато буталото е статично.

Ще приложим първия принцип на термодинамиката за газа под буталото:

$$Q' = \Delta A + \Delta U,$$ **1**

където $\Delta U = \frac{5}{2}nR\Delta T$ е изменението на вътрешната енергия на газа. Тогава **0.5**

$$Q\frac{R}{R+r} = pS\Delta h + \frac{5}{2}nR\Delta T,$$

$$Q\frac{R}{R+r} = pS\Delta h + \frac{5}{2}pSh\frac{\Delta T}{T_0},$$

$$\frac{Q}{pSh}\frac{R}{R+r} = \frac{\Delta h}{h} + \frac{5}{2}\frac{\Delta T}{T_0},$$

$$\frac{Q}{pSh}\frac{R}{R+r} = \frac{\Delta T}{T_0} + \frac{5}{2}\frac{\Delta T}{T_0}.$$

Така достигаме до

$$\boxed{\Delta T = \frac{2}{7}\frac{R}{R+r}\frac{Q}{(p_0S+mg)h}T_0 = 30\,\mathrm{K}.}$$ **1**

Допълнение. Също може да намерим, че буталото се повдига с $\Delta h = 5\,\mathrm{cm}$. На пръв поглед е впечатляващо как толкова тежък товар може да се повдигне от батерия за смартфон, но основната причина е просто това, че теглото се разпределя върху голяма площ на буталото, тоест оказваното от товара налягане не е твърде голямо. Именно това използват хидравличните преси.

Задача 3. Музика на сферите.

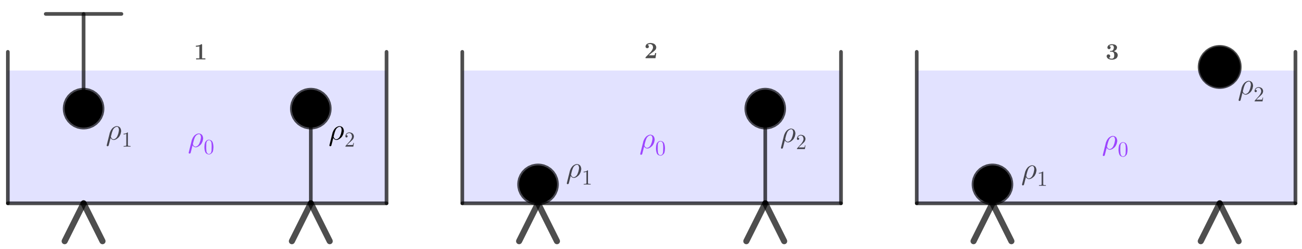
3.1.1. На каква височина h ще се намира топчето след време $\tau = 10\,\mathrm{s}$?	**3 точки**

Нека разглеждаме случващото се в отправна система, в която плочата е неподвижна. Тази
отправна система се движи с постоянна скорост, така че принципите на механиката остават
същите. Затова в тази отправна система топчето, както обичайно, се движи равнопроменливо
с ускорение g, насочено надолу. Топчето стартира със скорост $v = v_0 - v_P = 8\,\mathrm{m/s}$. То се
отдалечава максимално от плочата за време $t_u = v/g = 0.8\,\mathrm{s}$ и пада обратно върху плочата за
време $t_d = 2v/g = 1.6\,\mathrm{s}$. Тогава то се удря, при което скоростта му се обръща и същото движение **1**
се повтаря. За време $\tau = 10\,\mathrm{s}$ след началния момент топчето е направило шест издигания и
спускания, и в момента прави седмо издигане. От оттласкването му от плочата е минало време **0.5**
$\tau - 12v/g$, така че разстоянието между топчето и плочата е $v(\tau - 12v/g) - g(\tau - 12v/g)^2/2$. За **0.5**
време τ плочата се е издигнала на височина $v_P\tau$ спрямо нулата. Затова височината на топчето
се задава с

$$\boxed{h = v_P\tau + (v_0 - v_P)(\tau - 12(v_0 - v_P)/g) - \frac{g(\tau - 12(v_0 - v_P)/g)^2}{2} = 22.4\,\mathrm{m}.}$$ **1**

3.2.1. Изчислете установилата се разлика между силите на реакция ΔN_3.	**4 точки**

I начин. Означаваме трите положения от условието с 1, 2 и 3. Законите на хидростатиката
са линейни спрямо променливите h (ниво на течността) и V (потопен обем), което означава,
че може да разглеждаме силите на реакция N_L и N_R като суперпозиция (наслагване). С други
думи, всеки от елементите в съда поражда „свои“ сили на реакция при лявата и дясната опора,
а съответно и „своя“ разлика в силите на реакция. Сумарните сили N_L и N_R са резултат от
влиянието на всички елементи в съда. Да си представим, че пренасяме съдържанието на съд
3 в съд 1. Така общо имаме двоен обем вода, едно топче ρ_1 на нишка, едно потънало топче ρ_1,
едно топче ρ_2 на нишка за дъното и едно плаващо топче ρ_2 (на същите места спрямо опорите).
Поради суперпозицията, разликата в силите на реакция става $\Delta N_1 + \Delta N_3$. **1**



По закона на Паскал промяната в налягането поради наличието на топчето ρ_1 на нишка и
плаващото топче ρ_2 се предава равномерно навсякъде по течността[1]. Това означава, че не се
създават резултантни въртящи моменти спрямо двете опори (с други думи, няма причина
наличието на тези две топчета да създава разлика в N_L и N_R). Ако ги премахнем, търсената
разлика $N_L - N_R$ няма да се промени. Горната половина от течността може да се премахне по **2**
аналогични съображения – натискът от нея се предава равномерно върху дъното през долната
половина от течността. Така достигаме положение 2. Оказва се, че $\Delta N_1 + \Delta N_3 = \Delta N_2$. Затова

$$\boxed{\Delta N_3 = \Delta N_2 - \Delta N_1 = 2\,\mathrm{N}.}$$ **1**

II начин. Ще работим с всяко от трите положения поотделно. Обема на топчетата означаваме с V, а масата на течността означаваме с m. В положение 1 разглеждаме съда с течността и топчето ρ_2 като една цяла система. Течността действа на топче ρ_1 със сила $\rho_0 gV$ нагоре, тоест това

[1] Другите две топчета са в контакт с дъното на съда и не може да прилагаме същите съображения за тях.

топче действа на течността със същата сила, насочена надолу. Силите върху разглежданата система уравновесяват теглото ѝ $m_0g + \rho_2 gV$:

$$N_L + N_R = m_0g + \rho_0 gV + \rho_2 gV.$$

Сега да разгледаме силите върху дъното на съда. Топче ρ_2 също действа на течността със сила[2] $\rho_0 gV$. Силата $2\rho_0 gV$ върху течността се предава равномерно, така че силата на натиск върху дъното $2\rho_0 gV$ може да се представи като вектор надолу в средата на съда. На съда действа също сила на опън, равна на $(\rho_0 - \rho_2)gV$. Тъй като съдът не се преобръща спрямо нито една от опорите, сумарният въртящ момент на действащите върху съда сили спрямо опорите е нула. Нека разстоянието между опорите е $2x$. Силите по средата на съда създават въртящ момент $(mg + 2\rho_0 gV)x$ спрямо лявата опора в едната посока. Силите върху съда при дясната опора създават момент $(N_R + (\rho_0 - \rho_2)gV)2x$ в другата посока. Приравнявайки двата момента,

$$N_R + (\rho_0 - \rho_2)gV = \frac{mg}{2} + \rho_0 gV.$$

Тези две уравнения дават силите на реакция:

$$N_L = \frac{mg}{2} + \rho_0 gV \qquad N_R = \frac{mg}{2} + \rho_2 gV.$$

Така $\Delta N_1 = N_L - N_R = (\rho_0 - \rho_2)gV$. Разумно е да подложим отговора си на проверки. Например, **1***
ако двете топчета бяха направени от материала на течността, на практика имаме само течност, при което двете сили на реакция трябва да са еднакви от съображения за симетрия. Според изведената формула за ΔN_1, това наистина е така.

Преминаваме към положение 2. Уравнението за въртящите моменти не се променя. Уравнението за силите обаче е различно. За да го намерим, взимаме за една цяла система течността и двете топчета. Теглото ѝ се уравновесява от силите на реакция. Затова

$$N_L + N_R = \rho_1 gV + \rho_2 gV + mg.$$

Резултатите за двете сили са:

$$N_L = \frac{mg}{2} + \rho_1 gV \qquad N_R = \frac{mg}{2} + \rho_2 gV.$$

Разликата е $\Delta N_2 = (\rho_1 - \rho_2)gV$, което също издържа на предишната проверка. **1***

Преминаваме и към положение 3. Уравнението за силите остава същото. Уравнението за моментите сега се променя, защото няма сила на опън върху дъното; освен това плаващото топче оказва сила върху течността не $\rho_0 gV$, а $\rho_2 gV$. Равенството изглежда така:

$$N_R = \frac{mg}{2} + \frac{(\rho_0 + \rho_2)gV}{2}.$$

След като получим и другата сила на реакция, обобщаваме

$$N_L = \frac{mg}{2} + \rho_1 gV + \frac{(\rho_2 - \rho_0)gV}{2} \qquad N_R = \frac{mg}{2} + \frac{(\rho_0 + \rho_2)gV}{2}.$$

Разликата е $\Delta N_3 = (\rho_1 - \rho_0)gV$. След като имаме изрази за трите разлики, забелязваме, че **1***

$$\boxed{\Delta N_3 = \Delta N_2 - \Delta N_1 = 2\,\mathrm{N}.}$$ **1***

[2] Не разглеждахме това по-горе, тъй като за избраната тогава система това е вътрешно взаимодействие (което се компенсира от Архимедова сила $\rho_0 gV$ върху топче ρ_2).

3.3.1. Оценете относителната деформация ε. **3 точки**

Означаваме масата на топчето с m и константата на пружината с k. В равновесно положение разтягането на пружината е $\Delta x = \frac{mg}{k}$. А относителната деформация съответно е $\varepsilon = \frac{\Delta x}{l_0} = \frac{mg}{kl_0}$. **0.5**

Топчето извършва движения в две координати – по ъгъл θ и по разстояние до точката на окачване r. За малки относителни деформации двете движения зависят слабо едно от друго. Затова може да считаме движението по r като такова на обичайно пружинно махало. То съответно ще има период $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. **0.5**

Движението по θ се приема за такова на обичайно математическо махало, където дължината на „нишката“ е средната дължина на натоварената пружина, $l = l_0 + \Delta x$, тоест периодът е $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. **1**

Траекторията е затворена крива, така че единият период е кратен на другия. В случая $T_2 \approx 4T_1$. **0.5**

$$\Rightarrow \frac{l_0}{g} + \frac{m}{k} = 16\frac{m}{k}.$$

Получаваме, че $\frac{mg}{kl_0} = \frac{1}{15} = 6.7\%$. Така $\varepsilon = 6.7\%$. *Симулацията на движението е направена за* $\frac{kl_0}{mg} = 15.1$. **0.5**

Задачите от тази тема са съставени от Стефан Иванов.
Изказвам благодарности на Любомир Шойлев за симулацията в 3.3.