ППМГ „АКАД. НИКОЛА ОБРЕШКОВ“
IV ППМГ БУРГАС CHALLENGE

Състезание по физика, 28 май 2022 г.

Решения на темата за 7-8 клас

Задача 1. Пиратска физика.

1.1.1. При каква минимална маса на монетите m_0 сандъкът ще потъне? В тази част на задачата масата на сандъка се приема за пренебрежимо малка. **1 точка**

За да е възможно потъване, средната плътност на сандъка и съдържанието му трябва да надвишава тази на водата. **0.5**

Ако сандъкът е лек, в обема му abc има общо маса m_0, за която е вярно $m_0/abc = \rho_w$. Съответно $\boxed{m_0 = abc\rho_w = 15\,\mathrm{kg}}$. **0.5**

1.1.2. Намерете минималната плътност ρ_0 на материала, от който е изработен сандъкът, така че той да може да потъне празен. **2 точки**

Паралелепипедът празно пространство в сандъка има размери $(a-2d_0)\times(b-2d_0)\times(c-2d_0)$. Затова обемът на материала на сандъка е $V = abc - (a-2d_0)(b-2d_0)(c-2d_0)$. **1**

Масата му е $\rho_0 V$ и условието за потъване тогава е $\frac{\rho_0 V}{abc} = \rho_w$. Получаваме

$$\boxed{\rho_0 = \rho_w \frac{abc}{abc-(a-2d_0)(b-2d_0)(c-2d_0)} = 2400\,\mathrm{kg/m^3}.}$$ **1**

1.1.3. Намерете нивото на долятата вода h. **3 точки**

Трябва да намерим израз за масата на сандъка и съдържанието му. Масата на сандъка е $\rho_m(abc-(a-2d)(b-2d)(c-2d))$. Нека водата заема обем V, при което масата ѝ е $\rho_w V$. Към масата на сандъка и водата се добавя масата на златото m. Тогава условието за потъване изглежда така:

$$\frac{\rho_m(abc-(a-2d)(b-2d)(c-2d)) + \rho_w V + m}{abc} = \rho_w,$$ **1.5**

откъдето намираме нужния обем на водата

$$V = abc - \frac{m}{\rho_w} - \frac{\rho_m}{\rho_w}(abc-(a-2d)(b-2d)(c-2d)).$$

Водата заема обем $(a-2d)(b-2d)h$ минус обема на златото $\frac{m}{\rho_g}$, така че **0.5**

$$\boxed{h = \frac{1}{(a-2d)(b-2d)}\left(abc + m\left(\frac{1}{\rho_g} - \frac{1}{\rho_w}\right) - \frac{\rho_m}{\rho_w}(abc-(a-2d)(b-2d)(c-2d)\right) = 4.3\,\mathrm{cm}.}$$ **1**

1.2.1. Намерете необходимия за маневрата радиус на завоя R. **2 точки**

Нека патрулът има скорост v_2. Той ще настигне пиратите за време $\frac{s}{v_2-v_1} = \Delta t$, откъдето намираме $v_2 = v_1 + \frac{s}{\Delta t} = 6\,\mathrm{km/h}$. Да вземем момента, в който пиратите влизат в мъглата. Завоят **1**

им отнема време $\frac{\pi R}{v_1}$, а патрулът влиза в мъглата след време $\frac{s}{v_2}$. Приравняваме двете времена **0.5**
и получаваме

$$\boxed{R = \frac{s}{\pi}\frac{v_1}{v_1 + (s/\Delta t)} = 510\,\mathrm{m}.}$$ **0.5**

1.2.2. Ако прицелът на оръдието е точен, проверете дали снарядът ще уцели галерата патрул, или тя ще се измести достатъчно напред преди снарядът да падне. **2 точки**

I начин. По условие от гледна точка на пиратския кораб снарядът се движи перпендикулярно на кораба, тоест само по Ox на фиг. 3. Тъй като корабът се движи с v_1 спрямо водата по оста Oy, снарядът също трябва да се движи с v_1 по Oy спрямо водата. Тоест спрямо водата снарядът не се движи само с u по Ox, а и с v_1 по Oy. По тази причина той ще се приземи малко по-надолу от $\times$ на фиг. 3. Да намерим това отместване. Снарядът достига линията на движение на галерата патрул за време $\tau = \frac{2R}{u}$; тогава той се приземява. За това време той е изминал по Oy **0.5**
разстояние $v_1\tau$. Именно това е отместването от положението $\times$. Отделно от това, за времето τ галерата патрул се премества по Oy на разстояние $v_2\tau$ в обратната посока. Така се оказва, че снарядът пада на $l = (v_1 + v_2)\tau$ от носа на галерата. Ако това разстояние е по-малко от L, **1**
снарядът успява да падне някъде по борда на галерата. Пресмятаме $l = 2R\left(\frac{v_1+v_2}{u}\right) = 9.4\,\mathrm{m} < L$.
Снарядът $\boxed{\text{уцелва}}$ галерата. **0.5**

II начин. Друг подход е да преминем в отправна система, свързана с пиратите (да разглеждаме всички движения от гледна точка на пиратския кораб). При такива условия пиратският кораб е неподвижен, галерата патрул се движи със скорост $v_1 + v_2$ по Oy на фиг. 3, а снарядът се движи само по Ox със скорост u. Намираме, че снарядът достига до линията на движение на патрула за време $\tau = \frac{2R}{u}$, за което време галерата патрул се е преместила с $l = (v_1 + v_2)\tau$. **1.5***
Ако галерата се е преместила с повече от дължината си L спрямо траекторията на снаряда, тя ще го избегне. Но пресмятайки $l = 9.4\,\mathrm{m} < L$, виждаме, че снарядът $\boxed{\text{уцелва}}$. **0.5***

Задача 2. Вериги с няколко ключа.

2.1. В каква конфигурация (например $\{X1, Y0\}$) са ключовете в началото? **1 точка**

Ще представим решение на задачата с еквивалентни съпротивления[1]. Използваме, че при свързване на два резистора последователно/успоредно, еквивалентното съпротивление е по-голямо/по-малко от отделните съпротивления на двата резистора. Разглеждаме възможните положения на ключовете.

X	Y	конфигурация
0	0	R_C
0	1	R_C
1	0	$R_B \parallel R_C$
1	1	$R_A \parallel R_B \parallel R_C$

Таблица 1

[1]Задачата е решима също с извеждане и сравняване на формули за тока при всяка конфигурация на ключовете, използвайки принципите, че се запазва ток/напрежение при последователно/успоредно свързване. Такива решения също получават пълен брой точки. И все пак, познаването на еквивалентни съпротивления (наскоро премахнати от учебния материал) съкращава работата значително.

Имаме три възможни стойности на еквивалентното съпротивление, тоест три възможни стойности за тока. Токът ще е най-малък при конфигурация R_C и най-голям при конфигурация $R_A \parallel R_B \parallel R_C$. На графиката виждаме, че на четвъртата секунда се превключва от R_C на $R_A \parallel R_B \parallel R_C$. Това става с преместване само на един ключ. По такъв начин не може да стигнем от $\{X0, Y0\}$ до $\{X1, Y1\}$, така че между втората и четвъртата секунда системата имаме $\{X1, Y1\}$. За началната конфигурация остава $\boxed{\{X0, Y0\}}$. **1**

2.2. Намерете съпротивленията на резисторите R_A, R_B и R_C. **3 точки**

Началният ток е $I_1 = 2\,\mathrm{mA}$ и той съответства на R_C. По закона на Ом $R_C = U/I_1$, така че $\boxed{R_C = 6\,\mathrm{k\Omega}}$. Крайната конфигурация на ключовете е $R_B \parallel R_C$. Токът в края е $I_4 = 6\,\mathrm{mA}$, тоест **1**
$R_B \parallel R_C = 2\,\mathrm{k\Omega}$, при което $\boxed{R_B = 3\,\mathrm{k\Omega}}$ (от $\frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C} = \frac{1}{2\,\mathrm{k\Omega}}$). Също имаме $R_A \parallel R_B \parallel R_C = 1\,\mathrm{k\Omega}$. **1**
За последното съпротивление остава $\boxed{R_A = 2\,\mathrm{k\Omega}}$. **1**

2.3. Намерете тока през батерията при конфигурации на ключовете $\{X0, Y0, Z0\}$ и $\{X0, Y0, Z1\}$. **6 точки**

При различните положения на ключовете: **2**

X	Y	Z	конфигурация
0	0	0	R_B
0	0	1	$R_A - R_C$
0	1	0	$R_A \parallel R_B$
0	1	1	$(R_A \parallel R_B) - R_C$
1	0	0	$R_A - R_B$
1	0	1	R_C
1	1	0	0
1	1	1	R_C

Таблица 2

Втората конфигурация по графиката е непременно $\{X1, Y1, Z0\}$. Понеже в крайните две конфигурации токовете са еднакви, тези конфигурации са $\{X1, Y0, Z1\}$ и $\{X1, Y1, Z1\}$ в някакъв ред. Започвайки от $\{X1, Y1, Z0\}$, с две последователни превключвания може да получим единствено $\{X1, Y0, Z1\}$, така че това е предпоследната конфигурация. Може след първото превключване ситуацията да е или $\{X1, Y1, Z1\}$, или $\{X1, Y0, Z0\}$. Първият вариант се изключва, понеже той съответства на тока в края (а от графиката е видимо, че стойността е различна). Затова между четвъртата и шестата секунда имаме $R_A - R_B$. Нека сега намерим началната конфигурация. До нулата $\{X1, Y1, Z0\}$ има три начина да се стигне с едно превключване – от $\{X0, Y1, Z0\}$, $\{X1, Y0, Z0\}$ и $\{X1, Y0, Z0\}$. Вече проверихме, че последните два варианта съответстват на други токове, така че остава за началото да имаме $R_A \parallel R_B$.

От казаното дотук може да получим директно $R_C = 6\,\mathrm{k\Omega}$. Ако работим в килоомове, може да запишем уравненията **1**

$$\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} = \frac{1}{2}, \qquad R_A + R_B = 8.$$

Умножаваме двете страни на лявото уравнение по $R_A R_B$ и заместваме $R_B = 8 - R_A$, за да получим

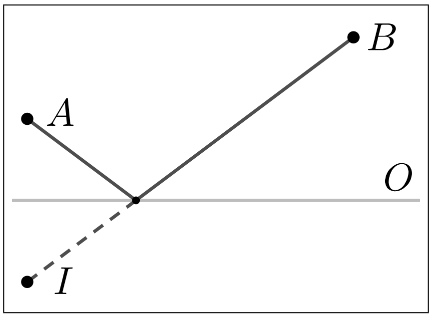
$$8 = \frac{1}{2} R_A (8 - R_A), \qquad R_A^2 - 8R_A + 16 = 0, \qquad (R_A - 4)^2 = 0.$$

В резултат $R_A = 4\,\mathrm{k\Omega}$ и $R_B = 4\,\mathrm{k\Omega}$. Стойностите могат да се намерят и по други начини, **2**
например ако забележим, че средното аритметично на съпротивленията е равно на средното хармонично. Остава да намерим токовете при дадените в условието конфигурации. Те отговарят съответно на R_B и $R_A - R_C$. Изчисляваме еквивалентните съпротивления и получаваме, че токовете са $\boxed{3\,\mathrm{mA}}$ и $\boxed{1.2\,\mathrm{mA}}$. **1**

Задача 3. Въздушен хокей.

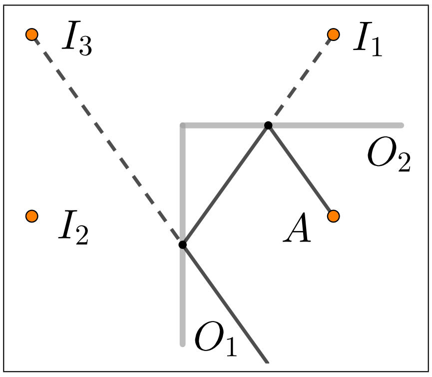
3.1. Постройте лъча от A, който след отражение преминава през B.	**2 точки**

Всички отклонени след отражение в огледалото лъчи се събират в образа I на точката A. По правата на отразения лъч, който преминава през B, лежат точките I и B. Начертаваме правата през I и B, пресичайки я с огледалото. В тази пресечна точка става отражението. Падащият лъч е между A и пресечната точка, а отразеният лъч е между пресечната точка и B. **2**



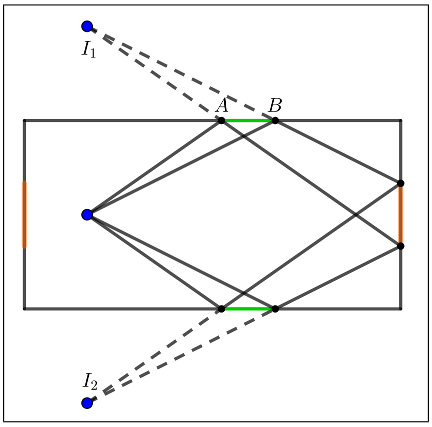
3.2. Постройте всички образи на A от огледалата.	**2 точки**

Точката A има два образа I_1 и I_2, отстоящи симетрично на A спрямо огледалата. Те играят **1**
ролята на „източници“ на лъчите, отразени съответно от O_2 и O_1. Нека обаче проверим също какво става с лъчите, които след отражение от O_2 падат върху O_1 и се отразяват за втори път. Преди падане върху O_1 тези лъчи сякаш излизат от образа I_2. Затова след отражение в O_1 те ще изглежда да идват от образа на I_2 от огледалото O_1. Това е още една точка „източник“, която означаваме с I_3. Може да проверим, че лъчите, които след отражение от O_1 падат върху **1**
O_2 и се отразяват за втори път, също ще изглежда да идват от I_3. Точките I_1, I_2, I_3 са всички образи на A, тъй като изчерпахме всички варианти за отражение на лъчите, които идват от A (например не е възможно отражение на лъч от O_2, после от O_1 и после пак от O_2)



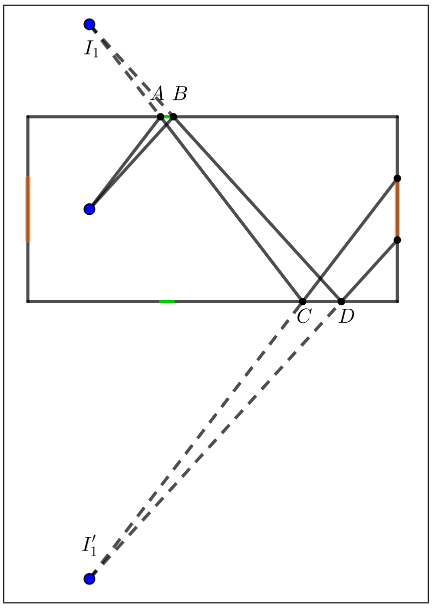
3.3. Отбележете всички участъци от стените на масата, в които може да забием шайбата, така че тя да попадне в противниковата врата след едно отражение.	**1 точка**

Траекторията на шайбата е аналогична на пътя на светлинен лъч, а стените на масата са аналогични на плоски огледала. След отражение от дадена стена, шайбата ще изглежда да идва от образа на началната точка в тази стена. За да решим задачата, отбелязваме образите от горната и долната стена. Свързваме образите с границите на противниковата врата. Така аналогично на **3.1.** получаваме траекториите, които „на косъм“ влизат във вратата. Между тези траектории по горната и долната стена маркираме (в зелено на схемата) участъците, в които може да забием шайбата. Образите от лявата и дясната стена не дават траектории, които могат да влязат в противниковата врата – макар че в случая на лявата стена това щеше да е възможно, ако не беше на пътя собствената ни врата, поради която бихме вкарали автогол. **1**



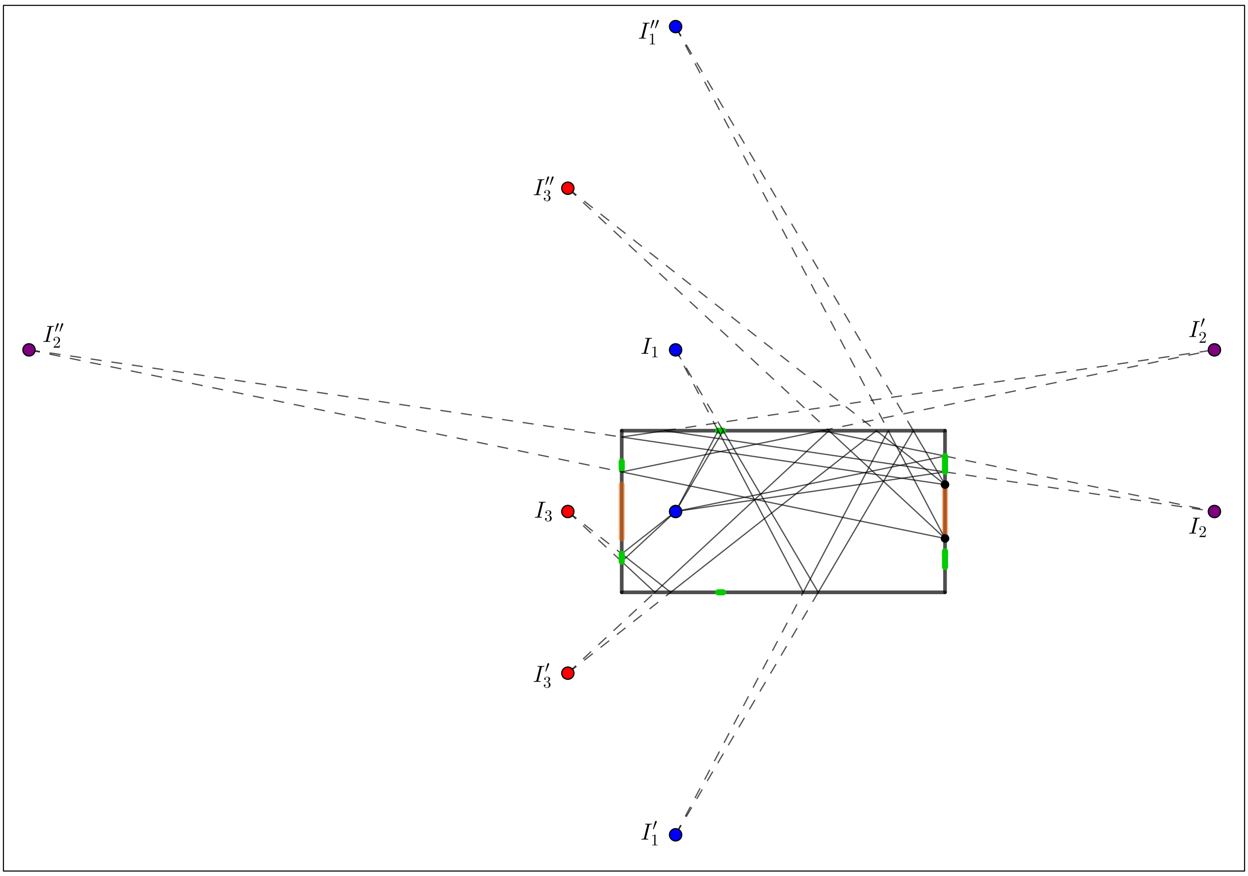
> **3.4.** Отбележете всички участъци от стените на масата, в които може да забием шайбата, така че тя да попадне в противниковата врата след две отражения. **2 точки**

За простота ще разгледаме само образа I_1 от горната стена. Ако намерим позволения участък в горната стена, в долната стена ще има същия участък от съображения за симетрия. След първото отражение ще изглежда, че лъчите излизат от I_1. Тези лъчи могат да претърпят второ отражение от долната стена, след което да попаднат във вратата. След второто отражение ще изглежда, че лъчите идват от образа на I_1 в долната стена, който ще означим с I_1'. Сега свързваме I_1' с границите на вратата и отбелязваме пресечните точки с долната стена с букви C и D. Тях свързваме с I_1 и отбелязваме пресечните точки с горната стена с букви A и B. Това ще са крайните точки, в които може да забием шайбата в горната стена, така че шайбата да влезе във вратата. Между тях маркираме позволения участък по горната стена. Чертаем и аналогичния участък по долната стена. Можем накрая също да проверим, че при отражение на шайбата в **1.5**
лявата стена и второ отражение в долната стена не може да попаднем в противниковата врата. **0.5**



3.5. Отбележете всички участъци от стените на масата, в които може да забием шайбата, така че тя да попадне в противниковата врата след три отражения. **3 точки**

Сега има няколко варианта за осъществяване на търсеното. Най-очевидният е по аналогия с
3.4. – отражение от горната, долната и пак от горната стена (или, от симетрия, долна-горна- **0.5**
долна). Също е възможно да забием шайбата в дясната стена, след което тя да се отрази от
горната и после лявата, попадайки във вратата (може и дясна-долна-лява). За да намерим **1**
позволения участък в този случай, трябва да построим образа I_2 на началната точка в дясната
стена, образа I_2' на I_2 в горната стена и образа I_2'' на I_2' в лявата стена. Има и вариант, в който
забиваме шайбата в лявата стена, при което има отражение в долната и после в горната (може и **1**
лява-горна-долна). За построенията е нужна съответно нова тройка образи I_3, I_3', I_3''. Проверява
се, че няма други възможни варианти, например поредица отражения дясна-лява-горна. **0.5**



Разбира се, не е нужно да чертаем самите траектории на шайбата, а е достатъчно само да отбелязваме пресечните точки със стените, при което чертежът не е твърде претрупан. Представяме за илюстрация позволените области в трите части на задачата върху един чертеж:

Задачите от тази тема са съставени от Стефан Иванов.