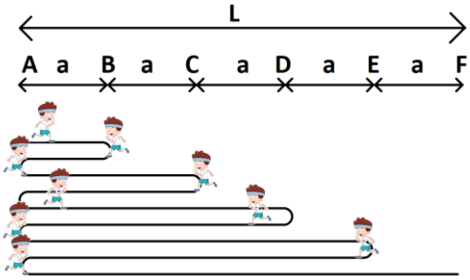
# IV ППМГ Бургас Challenge

*Състезание по физика, 28 май 2022*

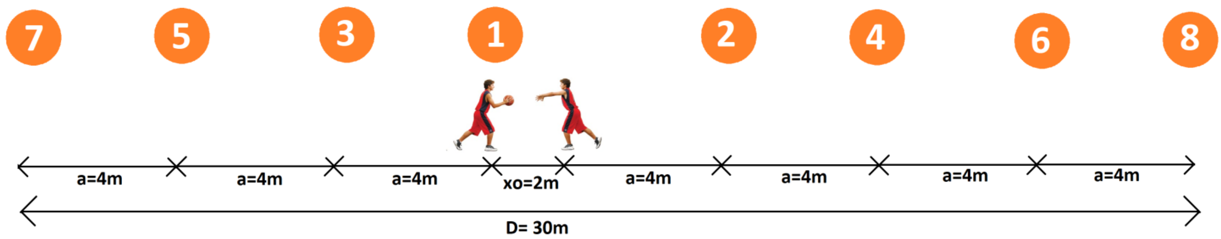
*Решения на темата за 6 клас*

**Задача 1. Тренировки за шампиони.**




*1.1.1.* Забелязваме, че $L = 5a$. Да изразим разстоянието $d$, което ще измине Ачо по време на своята совалка. То е $d = AB + BA + AC + CA + AD + DA + AE + EA + AF$, тоест $d = 2 \cdot (a + 2a + 3a + 4a) + 5a$. За улеснение тук и занапред може да ползваме, че $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Получаваме $d = 25a$ **(0,6 т.)**. Движението е равномерно, така че $t_1 = \frac{d}{v} = \frac{25a}{v} = \mathbf{30\ s}$ **(0,4 т.)**.

*1.2.1.* След края на всяко подаване разстоянието между момчетата се увеличава с $a$. Ако подаванията в тренировката са $N$, разстоянието се увеличава $N - 1$ пъти. Затова крайното разстояние е $D = (N-1)a + x_0$. Съответно $N = \frac{D - x_0}{a} + 1 = \mathbf{8}$ **(1 т.)**.




*1.2.2.* По време на всеки пас топката прелита разстоянието между момчетата. Общо **(1 т.)**

$$s = x_0 + (x_0 + a) + (x_0 + 2a) + \cdots (x_0 + 7a) = 8x_0 + 28a = \mathbf{128\ m}.$$

*1.2.3.* Тъй като спортистите се преместват за пренебрежимо малко време и топката се движи с постоянна скорост, за половината време от тренировката топката следва да е прелетяла половината от общия си път, тоест $\frac{s}{2} = 64\ \mathrm{m}$ **(0,5 т.)**. За да определим разстоянието между момчетата, трябва да изчислим след кое подаване топката лети във въздуха в търсения момент. След 5 пълни подавания топката е прелетяла

$$s_1 = x_0 + (x_0 + a) + \cdots + (x_0 + 4a) = 5x_0 + 10a = 50\ \mathrm{m},$$

а след 6 пълни подавания тя е прелетяла

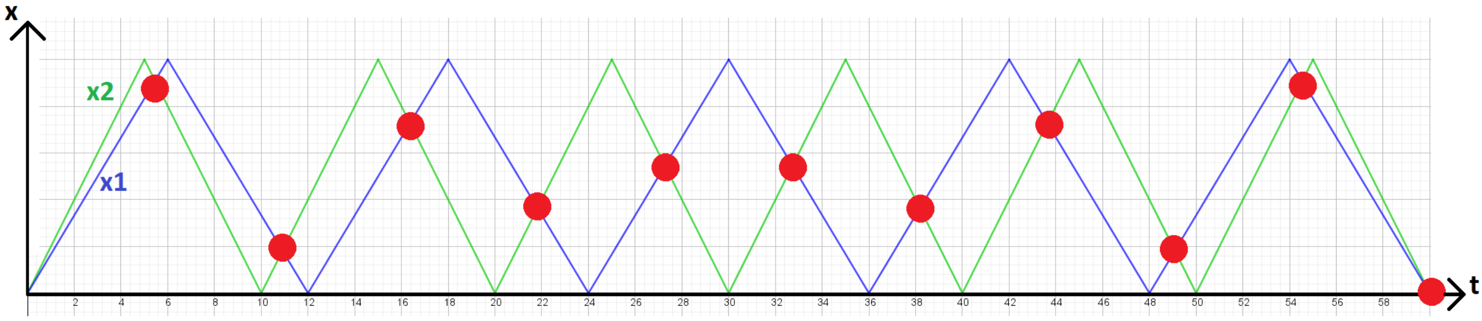
$$s_1 = x_0 + (x_0 + a) + \cdots + (x_0 + 5a) = 6x_0 + 15a = 72\ \mathrm{m},$$

Следователно половината от времето на тренировката минава по време на шестото подаване **(0,5 т.)**. Тогава разстоянието между момчетата е $d = x_0 + 5a = \mathbf{22\ m}$ **(0,5 т.)**.

*1.3.1.* Означаваме с $x_1$ разстоянието между Ачо и единия край на салона и с $x_2$ разстоянието между Ачо и същия край на салона. Те се срещат когато $x_1 = x_2$. Но как се променят $x_1$ и $x_2$ с времето? Ачо стига от първия край на салона до втория за време $t_1 = \frac{L}{v_1} = 6\ \mathrm{s}$, а Боби за $t_2 = \frac{L}{v_2} = 5\ \mathrm{s}$ **(0,5 т.)**.

На всеки $6\ \mathrm{s}$ Ачо променя посоката си на бягане. Когато Ачо бяга от първия към втория край, отстоянието му от първия край се задава с $x_1 = v_1 t$, където $t$ е времето между момента, в който Ачо за последно е бил в първия край, и настоящия момент. Когато Ачо бяга от втория към първия край $x_1 = L - v_1 t$, където $t$ е времето между момента, в който Ачо за последно е бил във втория край, и настоящия момент. Аналогично и за отстоянието $x_2$ на Боби от първия край.

Представяме на графика зависимостите на $x_1$ и $x_2$ от времето (в секунди). Когато зависимостите се пресичат ($x_1 = x_2$), момчетата се намират на едно и също място по едно и също време, тоест си подават топката **(2,5 т.)**. Достатъчно е да преброим пресичанията, за да открием, че момчетата си подават топката $N_1 = \mathbf{11}$ пъти за първите 61 секунди **(1 т.)**.




*1.3.2.* След 60 секунди момчетата се намират в същата ситуация, както и в началото. Тоест през 60 секунди те повтарят действията си **(0,5 т.)**. Но $\frac{N_2}{N_1} = 9$ и получаваме $T_2 = T_1 \frac{N_2}{N_1} = 9\ \mathrm{min}$ **(1 т.)**.

**Задача 2. Леденото кралство.**

*2.1.1.* За време $t$ към цилиндъра се залепя снежен паралепипед с дебелина $e$, височина $h$ и ширина, равна изминатия от Чан път за време $t$, тоест $s = vt$ **(0,5 т.)**. Изразяваме обема на цилиндъра като сбора от началния обем и добавения снежен паралепипед $V = (\pi r_0^2 + vte)h$ **(0,5 т.)**. Изразяваме масата на цилиндъра чрез плътността на снега $m = \rho V$. Намираме времето $t = T_0$, за което масата става общо $2\ \mathrm{kg}$ **(0,5+0,5 т. *за алгебра и число*)**:

$$T_0 = \frac{1}{ve}\left(\frac{m}{\rho h} - \pi r_0^2\right) = \mathbf{69\ s}.$$

*2.1.2.* Търсените моменти отговарят на цял брой обороти на цилиндъра, тоест на залепяне на цял брой слоеве с дебелина $e$. Това отговаря на моменти, в които „рулото“ сняг има за основа окръжност с радиус $r_0 + ne$, където $n$ е броят на залепените слоеве **(0,5 т.)**.

Целим да намерим моментите на пълно залепяне на първия, втория, третия, и четвъртия слой, защото след четвъртия слой дебелината на цилиндъра надвижава $r_0 + 4e = 5\ \mathrm{cm} = r$.

В момент $t$ рулото сняг има площ на основата $S = \pi r_0^2 + vte$. В моментите, когато основата има форма на окръжност с радиус $r_0 + ne$, площта ѝ е $S = \pi(r_0 + ne)^2$. Приравняваме двата израза, за да получим израз за моментите на навиване на $n$-ти слой, $t_n$ **(1 т.)**:

$$\pi r_0^2 + vt_n e = \pi(r_0 + ne)^2,$$

$$t_n = \frac{\pi((r_0 + ne)^2 - r_0^2)}{ve}.$$

От формулата пресмятаме $\boldsymbol{t_1 = 4,1\ \mathrm{s}}$, $\boldsymbol{t_2 = 8,8\ \mathrm{s}}$, $\boldsymbol{t_3 = 14,1\ \mathrm{s}}$, $\boldsymbol{t_4 = 20,1\ \mathrm{s}}$ **(0,5 т.)**.

*2.1.3.* По получената в предишната подточка формула намираме, че времето за навиване на голямата колона е $t_{01} = 69{,}1\ \mathrm{s}$, а на малките колони е $t_{02} = 8{,}8\ \mathrm{s}$. Видимо $t_{01} > 2t_{02}$, тоест **втората** стратегия е по-бърза **(1 т.)**.

*2.1.4.* В модела на задачата снегът е като навит килим. По част от повърхността на рулото са натрупани $n$ слоя с дебелина $e$, а по останалата повърхност са натрупани $n + 1$ слоя **(0,5 т.)**. Основата на рулото изглежда като окръжност само в конкретни моменти, които се задават с формулата за $t_n$. Нека проверим дали $T_1$ е именно такъв момент. Това става, като заместим във формулата $t_n = T_1$ и пресметнем $n$. Ако полученото $n$ е много близо до цяло число, може да считаме, че при $T_1$ рулото има за основа окръжност. Пресмятането **(0,5 т.)** дава

$$n = \frac{1}{e}\left(\sqrt{\frac{vT_1 e}{\pi} + r_0^2} - r_0\right) = 9{,}002.$$

И така, търкаляният сняг има **формата на кръгов цилиндър (0,5 т.)**. Радиусът на основата е $7.5\ \mathrm{cm}$, тоест върху началния цилиндър са навити точно **девет** слоя сняг **(0,5 т.)**.

*2.2.1.* Размерите на цилндъра – височина $h = 0{,}5\ \mathrm{m}$ и радиус от порядъка на $3\ \mathrm{cm}$ – изглеждат реалистични и са удобни за търкаляне **(0,25 т.)**.
Плътността на снега е ниска $\rho = 200\ \mathrm{kg/m^3}$, защото той е рехав, тоест голяма част от обема му е заета от въздух **(0,5 т.)**.
Търкалянето изисква внимателно прилагане на достатъчно голяма подходяща сила към земята, за да се залепи снегът към цилиндъра. Освен това, след известно време масата на цилиндъра става значителна. Затова не е изненада, че минаваме метър за цели 20 секунди **(0,25 т.)**.

*2.2.2.* Времето за един оборот е доста кратко, но то нараства с всяко търкаляне. Причината е, че колкото по-голям става радиусът на цилиндъра, толкова повече обем сняг трябва да се загребе, за да се облепи нов слой върху повърхността **(0,25 т.)**.
Ако търкаляме по-бързо, цилиндърът трупа повече сняг и достига желаните размери по-бързо – времената намаляват **(0,25 т.)**.
Ако се залепя по-голям слой сняг, от една страна трупаме по-голям обем върху цилиндъра, но от друга страна натрупаният обем сняг трябва да се разпределя върху цилиндър с по-голяма повърхност. За да разберем дали времената се увеличават или намаляват, опростяваме формулата:

$$t_n = \frac{\pi((r_0 + ne)^2 - r_0^2)}{ve} = \frac{\pi(2r_0 ne + n^2 e^2)}{ve} = \frac{2\pi n r_0}{v} + \frac{\pi n^2}{v} e.$$

Виждаме, че зависимостта е линейна – тоест ако $e$ нарасне, времената се увеличават **(0,5 т.)**.

*2.2.3.* Моделът не е реалистичен най-вече поради това, че не може да очакваме да се залепя върху цилиндъра слой с фиксирана дебелина. Дебелината ще зависи от теглото на цилиндъра, приложената от човека сила, рехавостта на снега, температурата **(0,5 т.)**. Събраният слой ще нараства с теглото на цилиндъра (повече налягане разтапя повече сняг, който после полепва по цилиндъра), така че снегът ще се трупа по-скоро „на спирала“, отколкото на плътни окръжности **(0,5 т.)**.

**Задача 3. Аладин и златните физични тайни.**

*3.1.1.* Всички тела, изградени от един и същ материал, имат еднаква **плътност** заради техния еднакъв вътрешен строеж **(1 т.)**.

*3.1.2.* За да намерим плътността, е достатъчно да знаем масата и обема. Можем да измерим масата на телата с везна **(0,25 т.)**. Обема на течности измерваме чрез наливането им в гравирана мензура **(0,25 т.)**. Обема на твърдо тяло се намира, като го потопим във вода и да измерим обема на отместената течност **(0,5 т.)**.

*3.2.1.* Сферите се допират по страната, следователно $r_1 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} a_1$ **(0,25 т.)**.

*3.2.2.* Една осма от всяка сфера по върховете влиза в границите на куба, а върховете са осем, следователно в границите на куба се намира $N = \mathbf{1}$ сфера **(0,75 т.)**.

*3.2.3.* Масата, съдържана в куба, е равна на масата на една сфера. Изразяваме масата на сферата чрез обема ѝ и плътността ѝ. Тя е $m = \rho_0 \frac{4}{3}\pi r_1^3 = \rho_0 \frac{1}{6}\pi a_1^3$ **(1 т.)**. Масата на куба е $V = a_1^3$. Плътността на решетката е $\rho_1 = \frac{m}{V} = \frac{1}{6}\pi\rho_0 = \mathbf{13600\ kg/m^3}$ **(1 т.)**.

*3.3.1.* В този случай в границата на куба имаме четири цели сфери (шест половини и осем осмини) **(1 т.)**. Следователно заградената от кубчето маса е $m = \rho_0 \frac{16}{3}\pi r_1^3$. Обемът на куба е $V = 2.83^3 r_1^3$. Получаваме $\rho_2 = \frac{m}{V} = \frac{16}{3\cdot 2.83^3}\pi\rho_0 = \mathbf{19200\ kg/m^3}$ **(2 т.)**, което отговаря на реалната плътност на златото.

*3.4.1.* Картинките ни дават информация за размерите и масите на кутиите. Жълтата, червената и оранжевата кутия имат еднакви обеми. Зелената кутия има двойно по-голяма височина, следователно двойно по-голям обем. Синята има тройно по-голям обем. Масите на жълтата и оранжевата кутии са равни. Масата на зелената и масата на червената са двойно по-големи. Масата на синята е тройно по-голяма. Виждаме, че плътностите на жълтата, оранжевата, зелената и синята кутии са еднакви и съответно в тях има един и същи вид съкровище **(1 т.)**. Аладин трябва да вземе най-голямата от тях, а именно **синята** кутия **(0,5 т.)**. **Червената** има различна плътност, тоест крие различен вид скъпоценност и Аладин трябва задължително да вземе и нея **(0,5 т.)**.

**Задачите от тази тема са предложени от Михаела Димитрова. Редакция: Стефан Иванов.**