ППМГ „АКАД. НИКОЛА ОБРЕШКОВ“
IV ППМГ БУРГАС CHALLENGE

Състезание по физика, 28 май 2022 г.

Решения на темата за 11-12 клас

Задача 1. Всичко за водата.

1.1.1. Определете масата M на шамандурата.	**1 т.**

По закона на Архимед теглото на отместената вода е равно на теглото на шамандурата, тоест $\rho_0 S\frac{h}{2}g = Mg$, така че $\boxed{M = \frac{1}{2}\rho_0 Sh = 200\,\mathrm{kg}.}$ **1**

1.1.2. На каква дълбочина x ще потъне допълнително шамандурата?	**1 т.**

Допълнителната дълбочина трябва да компенсира теглото на момичето, $\rho_0 Sxg = mg$. Затова

$$\boxed{x = \frac{m}{\rho_0 S} = 10\,\mathrm{cm}.}$$ **1**

1.2.1. На каква максимална височина h_0 над отвора се издига водната струя?	**2 т.**

Налягането на въздуха в резервоар 1 е $p_0 + \rho_0 g h_1$. Това е и налягането му в резервоар 2. **0.5**
Записваме уравнението на Бернули за токова линия, съдържаща точка по водната повърхност в резервоар 2 и точка на изхода на фонтана:

$$(p_0 + \rho_0 g h_1) = p_0 + \rho_0 g(h_2 + h_3) + \frac{\rho_0 v^2}{2}.$$ **1**

Оттук $v^2 = 2g(h_1 - h_2 - h_3)$. Със закона за запазване на енергията може да намерим височината, до която се издига струята – имаме $gh_0 = \frac{v^2}{2}$, откъдето $\boxed{h_0 = h_1 - h_2 - h_3 = 20\,\mathrm{m}.}$ **0.5**

1.3.1. Намерете наляганията p_1 и p_2 в точка 1 и точка 2.	**1.5 т.**

Тъй като сифонът има постоянно сечение, от уравнението за непрекъснатост следва, че скоростта на водата в сифона v е еднаква във всички точки. **0.5**
Затова уравнението на Бернули за всички точки в тръбата дава $p + \rho_0 g z = p_0$, където z е издигането спрямо точка 3. **0.5**
Така намираме за търсените точки

$$\boxed{p_1 = p_0 - \rho_0 g h_3 = 60\,000\,\mathrm{Pa},}$$ **0.25**

$$\boxed{p_2 = p_0 - \rho_0 g(h_2 + h_3) = 30\,000\,\mathrm{Pa}.}$$ **0.25**

1.3.2. Намерете скоростта v, с която водата изтича от сифона.	**1 т.**

Прилагаме уравнението на Бернули за токова линия през 0 и 3:

$$p_0 = p_0 - \rho_0 g h_3 + \frac{\rho_0 v^2}{2}.$$ **0.75**

Следва, че $\boxed{v = \sqrt{2gh_3} = 8.9\,\mathrm{m/s}.}$ **0.25**

1.3.3. Ако се променя дължината h_3 при постоянна дължина $h_2 = 3\,\mathrm{m}$, каква максимална скорост на водата $v_{\max}$ може да се достигне? **1 т.**

Налягането е най-малко в горната част на сифона и за да не се прекъсва струята, то трябва да приема положителни стойности. Максималната дължина на сифона се задава с условието $p_0 - \rho_0 g(h_2 + h_3) = 0$. **0.5**
Съответната максимална скорост е

$$\boxed{v_{\max} = \sqrt{2g\left(\frac{p_0}{\rho_0 g} - h_2\right)} = 11.8\,\mathrm{m/s}.}$$ **0.5**

1.4.1. Определете температурата t на водата в мивката, която се установява. **2.5 т.**

За единица време $\Delta\tau$ в мивката влиза маса вода $\mu\Delta\tau$ с температура t_1 и излиза маса вода $\mu\Delta\tau$ с температура t. Може да си представим, че за единица време $\Delta\tau$ маса вода $\mu\Delta\tau$ сменя температурата си от t на t_1, тоест в системата влиза топлина $c_0\mu(t_1 - t)\Delta\tau$. **0.75**

Повърхнината на водата е $S = 2a^2 + 4aH$, така че тя предава на околната среда за единица време топлина $k(2a^2 + 4aH)(t - t_0)\Delta\tau$. **0.75**

Понеже температурата в мивката реално остава постоянна, топлинният поток, влизащ в системата, е равен на потока, излизащ от нея. Приравняваме:

$$c_0\mu(t_1 - t)\Delta\tau = k(2a^2 + 4aH)(t - t_0)\Delta\tau,$$

$$\boxed{t = \frac{k(2a^2 + 4aH)t_0 + c_0\mu t_1}{k(2a^2 + 4aH) + c_0\mu} = 48\,^\circ\mathrm{C}.}$$ **1**

Задача 2. Електрически контури.

2.1.1. Намерете каква топлина Q_{tot} се отделя във веригата до достигане на крайното състояние. **0.5 т.**

В крайното състояние спира да тече ток, тоест напрежението върху кондензатора се изравнява с това на батерията. Крайният заряд на кондензатора е $C\varepsilon$. **0.25**
За да го натрупа върху плочите, батерията извършва работа $(C\varepsilon)\varepsilon$. Част от тази работа отива в енергията на кондензатора, а останалата се превръща в топлина при резистора. Тъй като енергията на кондензатора е $\frac{C\varepsilon^2}{2}$, за топлината остава

$$Q_{\mathrm{tot}} = C\varepsilon^2 - \frac{C\varepsilon^2}{2} = \boxed{\frac{C\varepsilon^2}{2} = 7.2\,\mathrm{mJ}.}$$ **0.25**

2.1.2. Намерете заряда върху кондензатора q в момента, когато във веригата се е отделила топлина $Q = 2\,\mathrm{mJ}$. **1 т.**

По закона за запазване на енергията,

$$q\varepsilon = \frac{q^2}{2C} + Q.$$ **0.25**

Решението на квадратното уравнение е

$$q = C\left(\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 2\frac{Q}{C}}\right).$$ **0.25**

По-големият корен е нефизичен (напрежението е повече от ε), така че остава

$$\boxed{q = C\left(\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 2\frac{Q}{C}}\right) = 0.18\,\mathrm{mC}.}$$ **0.5**

2.1.3. Намерете след какво време τ токът във веригата намалява с $b = 10\%$. **2.5 т.**

Токът във веригата се задава с $I = \frac{\varepsilon}{R}$, така че търсим момента, в който съпротивлението на жицата става $R_b = \frac{R_0}{1-b}$. **0.25**
Проверяваме как отделената топлина увеличава температурата на въздуха, а съответно и на жицата. За време Δt се отделя топлина $\Delta Q = \frac{U^2}{R(t)}\Delta t$, която се предава на газа. **0.25**
Той не извършва работа, така че всичката топлина отива за промяна на вътрешната му енергия, тоест $\Delta Q = nC_v\Delta T$, където n е количеството вещество в молове, C_v е моларният топлинен капацитет на въздуха, а ΔT е промяната в температурата на въздуха. **0.25**
Използваме $n = \frac{P_0V}{T_0R_g}$ и $C_v = \frac{5}{2}R_g$ (понеже въздухът е двуатомен газ), за да получим

$$\frac{\varepsilon^2}{R(t)}\Delta t = \frac{5P_0V}{2T_0}\Delta T.$$ **0.5**

По закона за промяната на съпротивлението с температурата, $\Delta R = R_0\kappa\Delta T$, така че

$$\Delta t = \frac{5P_0V}{2\kappa T_0\varepsilon^2 R_0}R\Delta R.$$ **0.25**

Именно по този начин е свързана много малка промяна във времето с много малка промяна в съпротивлението. Сега извършваме сумиране за всички времеви интервали Δt от 0 до τ:

$$\tau = \sum \Delta t = \sum\left(\frac{5P_0V}{2\kappa T_0\varepsilon^2 R_0}R\right)\Delta R,$$

и целта е да изчислим сумата вдясно. Да начертаем графика на функцията $f(R) = \frac{5P_0V}{2\kappa T_0\varepsilon^2 R_0}R$ в зависимост от R за времена от 0 до τ. Тази графика е отсечка между R_0 и R_b, намираща се върху права, минаваща през $(0,0)$. Площта под нея е площ на трапец,

$$S = \frac{f(R_b) + f(R_0)}{2}(R_b - R_0) = \frac{5P_0V}{4\kappa T_0\varepsilon^2 R_0}(R_b^2 - R_0^2).$$

Нека да разбием интервала между R_0 и R_b на много малки участъци ΔR. За всеки такъв участък при дадено R построяваме по графиката правоъгълник с ширина ΔR и височина $f(R)$.

Забелязваме, че при много малки ΔR сумата от площите на всички такива правоъгълници съвпада с площта под отсечката. Но тази сума от площите по дефиниция е

$$\sum \left(\frac{5P_0V}{2\kappa T_0 \varepsilon^2 R_0} R \right) \Delta R,$$

което е времето τ. Оттук $\tau = S$, тоест

$$\boxed{\tau = \frac{5b(2-b)P_0VR_0}{4(1-b)^2\kappa T_0\varepsilon^2} = 1.89\,\text{h}.}$$ **1**

2.2.1. На какво разстояние L от началното си положение ще спре цилиндърът?	**3 т.**

Когато цилиндърът се движи с v наляво, в проводниковия контур се индуцира напрежение

$$U = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = B\frac{\Delta S}{\Delta t} = B\frac{lv\Delta t}{\Delta t} = Blv.$$ **0.25**

Това поражда ток $I = \frac{Blv}{R}$. Той е хомогенен, защото основите са идеално проводящи. При това на цилиндъра действа сила $F_m = IlB$, приложена в центъра му и насочена надясно. **0.5**

Ще разгледаме силите, действащи върху системата, състояща се от цилиндъра и намотания върху него проводник. Отделно от магнитната сила, системата изпитва и сила на опън T от проводника, намиращ се на пода (във всеки край има $\frac{T}{2}$). Ако означим с r радиуса на цилиндъра, тази сила създава момент Tr, и именно той поддържа търкалянето без хлъзгане. За положителни посоки на линейната и ъгловата скорост избираме съответно „наляво“ и „обратно на часовниковата стрелка“. Тогава системата от уравнения на движението изглежда така:

$$ma = T - \frac{B^2l^2}{R}v,$$ **0.5**

$$-Tr = I_c\varepsilon,$$ **0.25**

където $I_c = \frac{1}{2}mr^2$ е инерчният момент на цилиндъра, а ε е ъгловото му ускорение. **0.25**

Условието за търкаляне без хлъзгане е $\varepsilon = \frac{a}{r}$. Оттук имаме $T = -\frac{1}{2}ma$. **0.25**
Заместваме това в първото уравнение, за да получим

$$a = -\frac{2B^2l^2}{3mR}v.$$ **0.25**

Остава да използваме, че

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta x}\frac{\Delta x}{\Delta t} = v\frac{\Delta v}{\Delta x},$$

$$\Rightarrow \Delta v = -\frac{2B^2l^2}{3mR}\Delta x.$$

Последното уравнение свързва малката промяна в скоростта при малко преместване. Сумираме за всички такива премествания от началото до края на движението, откъдето

$$(0 - v_0) = -\frac{2B^2l^2}{3mR}(L - 0).$$

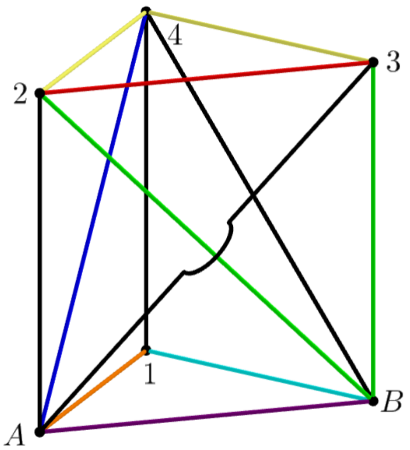
Съответно $\boxed{L = \frac{3mRv_0}{2B^2l^2}.}$ **0.75**

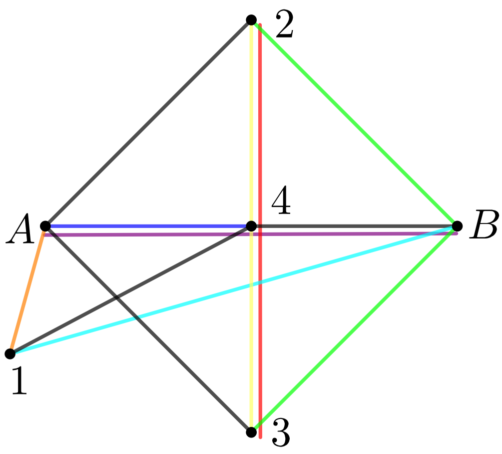
2.2.2. На каква сила на опън T трябва да издържа опората, за да не се отчупи при спирането на цилиндъра? **0.5 т.**

Силата на опън по модул е $\frac{1}{2}ma$, тоест е най-голяма при максимално по модул ускорение. Понеже $a = -\frac{2B^2l^2}{3mR}v$, максималната стойност на силата на опън е $\frac{B^2l^2v_0}{3R}$. Хоризонталната повърхност е гладка, така че тази сила се предава към опората без промени. Затова $\boxed{T_0 = \frac{B^2l^2v_0}{3R}.}$ **0.5**

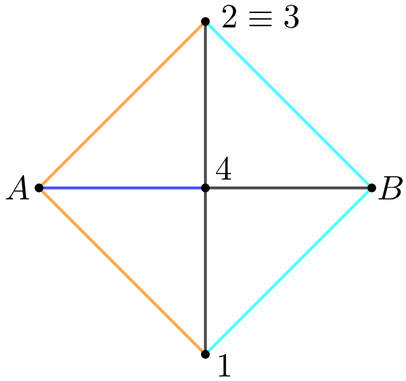
2.3.1. Намерете тока I през батерията. **2.5 т.**

Нека разгледаме ситуацията в една равнина, внимателно проследявайки коя точка с кои други е свързана: **0.5**

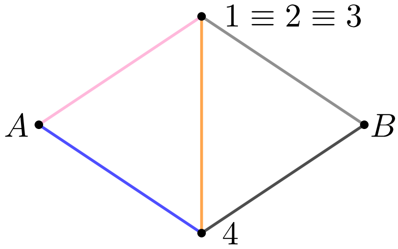




Системата може да се разглежда като лилав ($48\,\Omega$) проводник, свързан успоредно с всичко останало. Засега с цел по-лесно проследяване, изключваме лилавия проводник.
Забелязваме симетрия спрямо оста $A - 4 - B$, тоест при разпределението на токовете ще се оказва, че потенциалите на точки 2 и 3 са еднакви. По свързващите ги жици не тече ток, тоест такива жици няма да влияят на разпределението на токовете по никакъв начин. Може да премахнем червената жица без да променяме еквивалентното съпротивление. След това свързваме 2 и 3 с идеален проводник ($0\,\Omega$). Неговата дължина може да скъсяваме чак докато 2 съвпадне с 3, защото в рамките на този преход не се променя нищо. Изпълнявайки тази процедура, еквивалентната схема се „сгъва“ наполовина и получаваме няколко двойки успоредно свързани жици ($A - (2 \equiv 3)$, $(2 \equiv 3) - B$, $(2 \equiv 3) - 4$). Това се опростява до следната верига: **0.75**



Тук отново има симетрия и повтаряме процедурата, означавайки $3\,\Omega$ с розово и $9\,\Omega$ със сиво:



По-нататък или може да използваме директно законите на Кирхоф, или да разпознаем, че щом $3 \cdot 12 = 4 \cdot 9$, конфигурацията е балансиран Уитстънов мост, при което през оранжевия проводник не тече ток и може да го премахнем. **0.75**

Спомняйки си за лилавия проводник, еквивалентното съпротивление се намира като

$$\frac{1}{R_{\mathrm{eq}}} = \frac{1}{12\,\Omega} + \frac{1}{16\,\Omega} + \frac{1}{48\,\Omega},$$

тоест то е $6\,\Omega$ и токът през батерията е $\boxed{I = 2\,\mathrm{A}.}$ **0.5**

Задача 3. Закони на Кеплер.

3.1.1. Запишете израз за радиус-вектора $\vec{r}_{\mathrm{CM}}$ на центъра на масите (ЦМ) на двете тела в зависимост от $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, M и m. **0.2 т.**

$$\boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{M\vec{r}_1 + m\vec{r}_2}{M+m}.}$$ **0.2**

3.1.2. Използвайте, че скоростта се дефинира като промяна на позицията с времето, и запишете израз за скоростта на центъра на масите $\vec{V}_{\mathrm{CM}}$ спрямо $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, M и m. **0.2 т.**

$$\boxed{\vec{V}_{CM} = \frac{M\vec{V}_1 + m\vec{V}_2}{M+m}.}$$ **0.2**

3.1.3. Обяснете защо $\vec{V}_{\mathrm{CM}}$ остава постоянна с времето. **0.2 т.**

В системата няма външни сили, така че общият импулс се запазва. **0.1**

Той е $M\vec{V}_1 + m\vec{V}_2$ и виждаме, че $\vec{V}_{CM}$ тогава също се запазва. $\boxed{\checkmark}$ **0.1**

3.1.4. Намерете тогава общия импулс $\vec{p}$ на двете тела. Ще влияе ли върху ускорението на телата в новата отправна система друго, освен гравитационните сили? **0.2 т.**

В новата ОС скоростите на телата са $\vec{V}_1 - \vec{V}_{CM}$ и $\vec{V}_2 - \vec{V}_{CM}$, така че импулсът е $\vec{p} = M(\vec{V}_1 - \vec{V}_{CM}) + m(\vec{V}_2 - \vec{V}_{CM})$. Тъй като $(M+m)\vec{V}_{CM} = M\vec{V}_1 + m\vec{V}_2$, имаме $\boxed{\vec{p} = \vec{0}}$. **0.1**

Щом $\vec{V}_{CM}$ е постоянна, новата ОС също е инерциална. Тогава и в нея няма други взаимодействия освен гравитационните сили. $\boxed{\checkmark}$ **0.1**

3.1.5. Покажете, че траекторията на m относно M е еднаква по форма с траекторията на m относно ЦМ, но е $\frac{M+m}{M}$ пъти по-голяма по размер. **0.3 т.**

Да поставим координатното начало, откъдето отчитаме радиус-векторите, в центъра на масите. Тогава радиус-векторът на центъра на масите от една страна е $\frac{M\vec{r_1}+m\vec{r_2}}{M+m}$, но от друга страна е $\vec{0}$, така че е изпълнено $M\vec{r_1}+m\vec{r_2}=\vec{0}$. Затова за големините на радиус-векторите (които са сега разстоянията от ЦМ до всяко от телата) е вярно $Mr_1 = mr_2$. **0.15**

Отсечката, свързваща m с ЦМ, има дължина r_2. Отсечката, свързваща m с M, е в същото направление, но има в този момент дължина $r_1 + r_2 = \frac{m}{M}r_2 + r_2 = \frac{M+m}{M}r_2$. Затова траекторията на m относно M изглежда като тази относно ЦМ, но мащабирана с коефициент $\frac{M+m}{M}$. $\boxed{\checkmark}$ **0.15**

3.1.6. Покажете, че действието на M върху m може да се замени еквивалентно (т.е. запазвайки траекторията на m) с това на неподвижна маса M', разположена в ЦМ. Изразете M' в зависимост от M и m. **0.4 т.**

Силата, която m изпитва, е $\frac{\gamma mM}{(r_1+r_2)^2}$. Това може да се запише като

$$\frac{\gamma mM\left(\frac{r_2}{r_1+r_2}\right)^2}{r_2^2}.$$

Този израз може да се интерпретира като привличане от тяло с маса

$$M' = M\left(\frac{r_2}{r_1+r_2}\right)^2 = \boxed{\frac{M^3}{(M+m)^2}},$$ **0.2**

поставено в ЦМ (понеже по дефиниция r_2 е разстоянието до ЦМ).

Самата физическа замяна на M с M', стига да придържаме M' в ЦМ, няма да промени нищо в траекторията на m – силата върху m във всички моменти е същата, а съответно и ускорението на m. $\boxed{\checkmark}$ **0.2**

3.1.7. Обяснете защо величината $E \equiv \frac{mv^2}{2} - \frac{\gamma M' m}{r}$ се запазва. **0.3 т.**

I начин. В новата система на m и M' действа гравитацията, която е консервативна сила. Също действа сила, която поддържа M' в ЦМ, променяйки постоянно големината и посоката си. Но понеже M' не се премества, тази сила няма да върши работа. **0.2**
И така, работа се извършва само от консервативни сили, тоест механичната енергия, в случая $\frac{mv^2}{2} - \frac{\gamma M' m}{r}$, не се променя. $\boxed{\checkmark}$ **0.1**

II начин. В началната физична постановка (m и M) параметрите по траекторията (v и r) са същите, така че е естествено да очакваме зависимостта за движението $E = \text{const}$ да остава вярна. Нека проверим. Връщаме се към означенията r_1 и r_2 за разстоянията до ЦМ и въвеждаме означения v_1 и v_2 за скоростите. Търси се да покажем, че

$$E \equiv \frac{mv_2^2}{2} - \frac{\gamma M^3 m}{(M+m)^2 r_2} = \text{const}.$$

В системата действа само гравитация, която е консервативна, така че механичната енергия

$$E_0 = \frac{Mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} - \frac{\gamma Mm}{(r_1 + r_2)} = \text{const.}$$ **0.1***

Използваме, че импулсът в отправната ни система е $\vec{0}$, откъдето $Mv_1 = mv_2$. Тогава **0.1***

$$E_0 = \frac{m^2 v_2^2}{2M} + \frac{mv_2^2}{2} - \frac{\gamma M^2 m}{r_2(M+m)},$$

$$E_0 = \frac{M+m}{M}\frac{mv_2^2}{2} - \frac{M+m}{M}\frac{\gamma M^3 m}{(M+m)^2 r_2} = \frac{M+m}{M}E.$$

Затова и E ще се запазва. ☑ **0.1***

3.1.8. Обяснете защо величината $L \equiv mvr\sin\alpha$ се запазва. Обяснете защо траекторията на m лежи във фиксирана равнина. **0.3 т.**

В системата на m и M' величина L е големината на момента на импулса на m. А моментът на импулса се запазва, защото на m действа централна сила (т.е. ускорението е насочено по радиус-вектора). ☑ **0.15**

Посоката на вектора на момента на импулса също се запазва. За да е осъществимо това, трябва радиус-векторът и векторът на скоростта да остават в една и съща равнина, тъй като по дефиниция те са перпендикулярни на вектора на момента на импулса. ☑ **0.15**

3.2.1. Запишете израз за E в зависимост от $v_\parallel$, L, r, M' и m. Покажете, че по траектория с фиксирани E и L единствените *позволени* разстояния до ЦМ са решенията на системата $f \equiv \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\gamma M'm}{r} - E \leq 0$, $r > 0$. **0.3 т.**

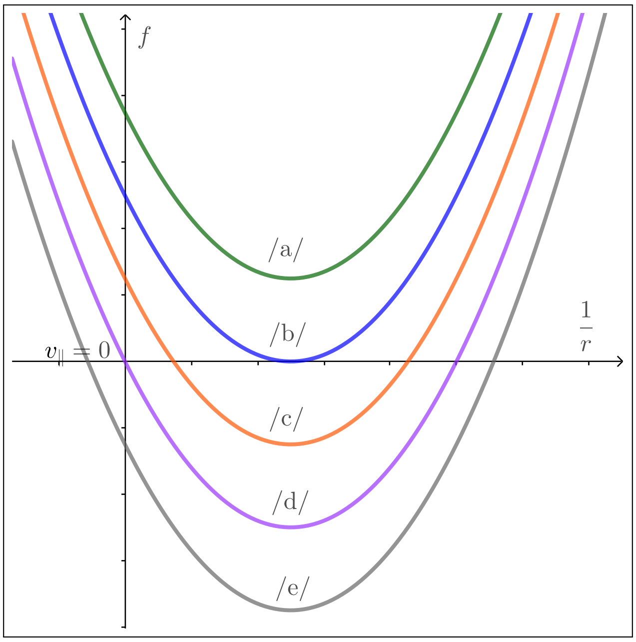
Записвайки $L = mv_\perp r$ и $v^2 = v_\perp^2 + v_\parallel^2$, получаваме

$$\boxed{E = \frac{mv_\parallel^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\gamma M'm}{r}.}$$ **0.2**

Непременно $v_\parallel^2 \geq 0$, така че трябва $\frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\gamma M'm}{r} - E \leq 0$, спазвайки $r > 0$. ☑ **0.1**

3.2.2. Начертайте качествена графика на f от $\frac{1}{r}$ за фиксирана стойност на L и няколко различни стойности на E. Обяснете внимателно защо по пълната траектория всички позволени в 3.2.1. разстояния до ЦМ действително се срещат. **0.5 т.**

Зависимостта на f от $\frac{1}{r}$ е квадратна функция, чиято форма зависи от L, като E определя само свободния член. Начертаваме f за няколко стойности на E. **0.2**



Допустимите разстояния са тези, за които $f \leq 0$ и $\frac{1}{r} > 0$. Видно е, че за някои стойности на E спрямо L (вж. /a/) няма позволени разстояния, тоест няма такива траектории.

Когато $v_\parallel = 0$, лъчевата скорост се обръща от отрицателна в положителна или обратно. Ако в действителната траектория няма такъв момент, лъчевата скорост по нея не променя знака си, тоест тя достига $r = 0$, което е непозволено. Затова действителната траектория (при фиксирани E и L) трябва да съдържа поне един момент, съответстващ на $v_\parallel = 0$. След него, по-нататъшното движение продължава с плавни промени в разстоянието, извършвайки обхождане непременно на допустимите r в една посока. То не спира до срещане на друг момент, в който $v_\parallel = 0$. Докато това стане, ако въобще стане, ще са обходени всички допустими r. ☑ **0.3**

3.2.3. Покажете, че при $E > 0$ траекторията е отворена крива, а при $E < 0$ е затворена крива (независимо от L). **0.2 т.**

Кривата е отворена, ако траекторията съдържа $\frac{1}{r} \to 0$. Стойността на f при $\frac{1}{r} \to 0$ е равна на $-E$. Когато $E > 0$, $\frac{1}{r} \to 0$ се съдържа, а при $E < 0$ не се. ☑ **0.2**

3.2.4. Покажете, че за всяка траектория съществува момент, в който m е на някакво разстояние r_0 от ЦМ, а тангенциалната скорост на m в този момент се оказва равна на $\sqrt{\frac{\gamma M'}{r_0}}$. **0.3 т.**

Дадена траектория е възможна, ако за нейните E и L има поне едно разстояние $r > 0$, за което $f \leq 0$. За възможните траектории минимумът на f със сигурност съответства на такова разстояние. Той се получава при $\frac{1}{r_0} = -\frac{b}{2a} = \frac{GM'm^2}{L^2}$, така че за всички възможни траектории има момент, в който разстоянието до ЦМ се задава по този начин. Ако моментът на импулса се запише като $mv_\perp r_0$, където $v_\perp$ е тангенциалната скрост тогава, получаваме, че $v_\perp = \sqrt{\frac{\gamma M'}{r_0}}$.
☑ **0.3**

3.2.5. Покажете, че траекторията на m може като частен случай да бъде кръгова. Покажете, че ако радиусът ѝ е R, то скоростта на движение по нея трябва да бъде $\sqrt{\frac{\gamma M'}{R}}$. **0.3 т.**

Траекторията може да бъде кръгова при такива E и L, за които минимумът на f е равен на нула. Тогава по нея има само едно възможно разстояние до ЦМ (вж. /b/ на графиката). $\boxed{\checkmark}$ **0.1**

За кръгова орбита с радиус R гравитационната сила се явява центростремителна:

$$\frac{\gamma M' m}{R^2} = \frac{m v_c^2}{R},$$

където v_c е орбиталната скорост. Затова $v_c = \sqrt{\frac{\gamma M'}{R}}$. $\boxed{\checkmark}$ **0.2**

3.2.6. Покажете, че по двете траектории при преместване от $\theta = \pi/2$ до произволно θ векторът на импулса на m се изменя еднакво. **0.7 т.**

Да разгледаме какво се случва по двете траектории, когато започвайки от една и съща координата $\theta = \theta'$, m се премести с еднакъв малък ъгъл с големина $\Delta\theta$. И по двете траектории се внася промяна в скоростта на m, насочена в една и съща посока, тъй като $\Delta\vec{v} = \vec{a}\Delta t$, а ускорението $\vec{a}$ в двата случая има еднакво направление (към ЦМ). **0.1**

Сега ще изразим големината на внесената промяна Δv спрямо $\Delta\theta$. Тя е $\Delta v = a\Delta t = \frac{GM'}{r^2}\Delta t$. Използваме, че $v_\perp = \frac{r\Delta\theta}{\Delta t}$, за да получим

$$\Delta v = \frac{GM'}{r^2}\Delta t = \frac{GM'}{r^2}\frac{r\Delta\theta}{v_\perp} = \frac{GM' m\Delta\theta}{L}.$$

Двете траектории имат еднакъв момент на импулса, така че промяната в големината на скоростта за участъка $\Delta\theta$ е еднаква и по двете. **0.5**

И така, промяната във $\vec{v}$ е еднаква по две траектории за всеки участък $\Delta\theta$. Сумирайки малките промени във $\vec{v}$ между $\theta = \pi/2$ и търсената произволна стойност на θ, получаваме търсеното. $\boxed{\checkmark}$ **0.1**

3.2.7. Така изведете, че в общия случай траекторията на m около ЦМ е конично сечение, чийто фокус съвпада с ЦМ. **0.4 т.**

Съгласно изведеното, по случайната траектория векторът на скоростта при дадено θ ще бъде векторна сума на u и скоростта по кръговата траектория при θ. Тангенциалната компонента на скоростта на това място тогава ще бъде $v - u\cos\theta$. **0.2**

По случайната траектория моментът на импулса се запазва, така че $r(v - u\cos\theta) = r_0 v$. Оттук достигаме до

$$r(\theta) = \frac{r_0}{1 - \frac{u}{v}\cos\theta},$$

за което е известно, че е уравнение на конично сечение с фокус в $r = 0$. $\boxed{\checkmark}$ **0.2**

3.3.1. Разгледайте преместването по траекторията за малък интервал от време и така покажете, че моментната секторна скорост $\sigma|_{\Delta t\to 0}$ е еднаква по цялата траектория. **0.4 т.**

За малък интервал от време пътят на m клони към отсечка, а обраната площ – към триъгълник. Изразяваме площта за време Δt като $\Delta S = \frac{1}{2}(v\Delta t)h$, където h е височината от ЦМ към правата на v. Забелязваме, че $h = r\sin\alpha$, откъдето

$$\sigma|_{\Delta t\to 0} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2}vr\sin\alpha = \frac{L}{2m} = \text{const}.$$ **0.4**

3.4.1. Покажете, че $\frac{a'^3}{T^2} = \frac{\gamma M'}{4\pi^2}$. **1 т.**

Секторната скорост е постоянна, така че може да я изразим като $\sigma = \frac{\pi a' b'}{T}$ („цялата площ за цялото време“). Оттук намираме, че $T = \pi a' b' \frac{2m}{L}$. Затова **0.25**

$$\frac{a'^3}{T^2} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{a'}{b'^2}\left(\frac{L}{m}\right)^2.$$

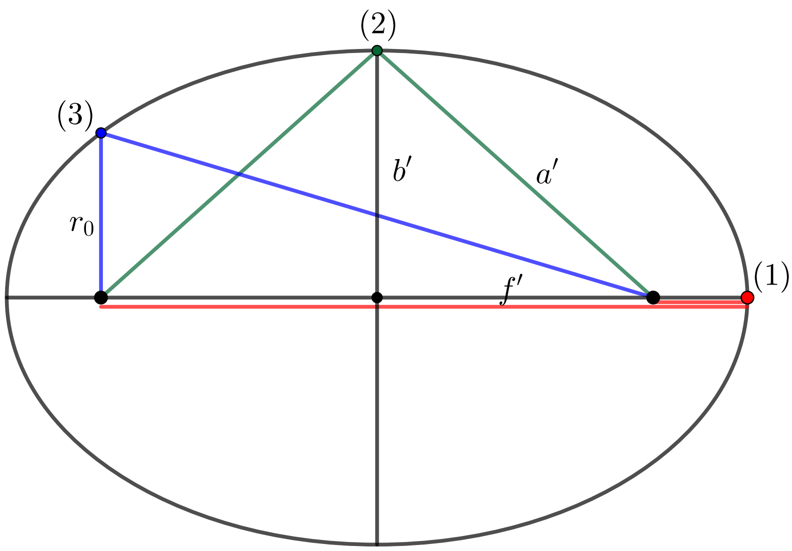
Сега използваме от 3.2.4., че $L = mv_\perp r = m\sqrt{\frac{\gamma M'}{r_0}}r_0$, където $r_0 = r(\theta = \pi/2)$, достигайки до

$$\frac{a'^3}{T^2} = \frac{\gamma M'}{4\pi^2}\frac{a' r_0}{b'^2}.$$ **0.25**

За да изразим r_0 спрямо a' и b', начертаваме елипса с няколко характерни точки по нея. Сумата от разстоянията за всички тях е еднаква, и от (1) е видно, че тази сума е равна на $2a'$. При (2) разстоянията до двата фокуса са еднакви, така че всяко е по a', и намираме, че $f'^2 = a'^2 - b'^2$. За (3) записваме

$$r_0 + (2f')^2 = (2a' - r_0)^2,$$
$$r_0^2 + 4a'^2 - 4b'^2 = 4a'^2 - 4ar_0 + r_0^2,$$
$$r_0 = \frac{b'^2}{a'}.$$

Това доказва търсеното. ☑ **0.5**



3.4.2. Така покажете, че ако траекторията на m относно M има голяма полуос a, е изпълнено $\frac{a^3}{T^2} = \frac{\gamma(M+m)}{4\pi^2}$. **0.2 т.**

От 3.1.5. и 3.1.6., $a = a'\frac{M+m}{M}$ и $M' = \frac{M^3}{(M+m)^2}$. Тогава

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\gamma}{4\pi^2}\frac{M^3}{(M+m)^2}\left(\frac{M+m}{M}\right)^3 = \frac{\gamma(M+m)}{4\pi^2}.$$ ☑ **0.2**

3.5.1. Оценете след какво време τ_1 Земята ще достигне Слънцето.	**0.8 т.**

Земята ще се движи по отсечка в гравитационното поле на Слънцето. Тя се явява частен случай на елиптична траектория – фокусът е в края на траекторията, така че ексцентрицитетът е равен на 1. **0.3**

Земята отначало е в другия край на траекторията, тъй като стартира с нулева лъчева скорост. Голямата полуос на траекторията съответно е $a = \frac{r_E}{2}$. От съображения за симетрия достигането на Слънцето, чийто радиус считаме за пренебрежим, ще отнема половината от периода T по тази траектория, тоест $T = 2\tau_1$. **0.25**

Сега прилагаме третия закон на Кеплер, пренебрегвайки масата на Земята:

$$\frac{r_E^3}{32\tau_1^2} = \frac{\gamma M_\odot}{4\pi^2},$$

$$\boxed{\tau_1 = \pi\sqrt{\frac{r_E^3}{8\gamma M_\odot}} = 65\,\mathrm{d}.}$$ **0.25**

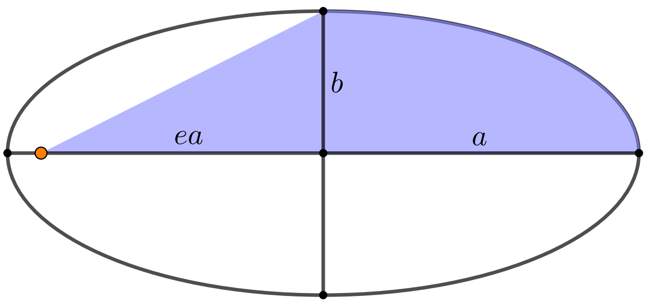
3.5.2. Оценете след какво време τ_2 Земята ще бъде на $0.5\,\mathrm{AU}$ от Слънцето.	**0.7 т.**

Придвижването от r_E до половината от разстоянието до другия край $r_E/2$ съответства на това радиус-векторът да обере площ $\frac{\pi ab}{4} + \frac{eab}{2}$, както е показано на чертежа. **0.2**

При придвижването до Слънцето, той обира площ $\frac{\pi ab}{2}$. Сега по втория закон на Кеплер

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{\frac{\pi ab}{4} + \frac{eab}{2}}{\frac{\pi ab}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{e}{\pi} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi},$$ **0.3**

$$\boxed{\tau_2 = \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)\sqrt{\frac{r_E^3}{8\gamma M_\odot}} = 53\,\mathrm{d}.}$$ **0.2**



3.6.1. Намерете интензитета I_0 на слънчевата светлина (във $\mathrm{W/m^2}$) върху перпендикулярна на слънчевите лъчи повърхност, разположена на $r_E = 1\,\mathrm{AU}$ от Слънцето.	**0.5 т.**

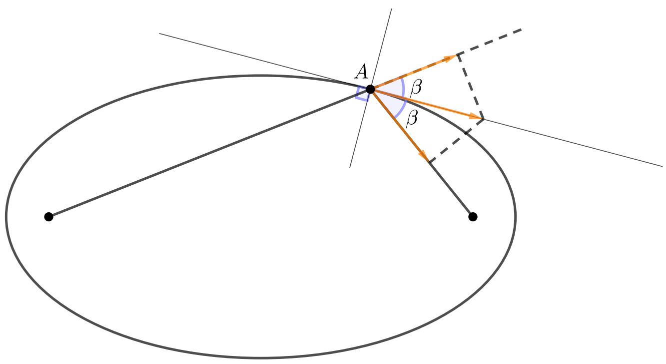
По закона на Стефан-Болцман слънчевата светимост се изразява с $L = \sigma T_\odot^4 4\pi R_\odot^2$. **0.2**

Да обвием Слънцето със сфера с радиус r. Поради симетрията при всички точки от сферата полученият интензитет I е еднакъв. Умножавайки го по площта на сферата, трябва да получим общия поток енергия, преминаващ през сферата за единица време. Този поток трябва да се равнява на излъчената от Слънцето енергия за единица време, иначе между Слънцето и сферата някъде постоянно трябва да се трупа енергия, което е нефизично. И така, $I = \frac{L_\odot}{4\pi r^2}$. В конкретния случай

$$\boxed{I_0 = \sigma T_\odot^4 \left(\frac{R_\odot}{r_E}\right)^2 = 1350\,\mathrm{W\,m^{-2}}.}$$ **0.3**

3.6.2. Покажете, че след второто отражение лъчът се пренасочва към друга точка от лунната повърхност. Изведете геометричните свойства, които използвате. **0.6 т.**

Ще докажем, че за всяка точка A от елипса нормалата (перпендкиулярна на допирателната) е ъглополовяща на ъгъла, сключен от отсечките, свързващи A с двата фокуса. Да разгледаме движението на A по елипсата с някаква скорост, насочена по допирателната. При движението сборът от разстоянията до двата фокуса остава един и същ, така че винаги с колкото се увеличава едното разстояние, с толкова намалява другото, включително и за малък момент от време. Това означава, че винаги проекцията на скоростта на A към едното разстояние е равна на проекцията на скоростта на скоростта на A към другото разстояние. Това прави ъглите β на чертежа равни. Нормалата тогава образува два ъгъла по $\frac{\pi}{2} - \beta$ с отсечките към фокусите, което се и искаше. **0.4**



Огледалата са насочени по допирателната, така че ако към тях идват лъчи от единия фокус, те ще ги пренасочват към другия. Калибровъчният лъч в случая се насочва към зенита, тоест по правата през центъра на Луната, където лежи единият фокус. Затова огледало 1 го пренасочва към втория фокус. След това лъчът достига до огледало 2 и се пренасочва аналогично към първия фокус, попадайки върху точка от Луната (откъдето ще изглежда, че лъчът идва от зенита). $\boxed{\checkmark}$ **0.2**

3.6.3. Ще свети ли лампата в разглеждания момент? **1 т.**

Първо с третия закон на Кеплер намираме голямата полуос на орбитата на спътниците:

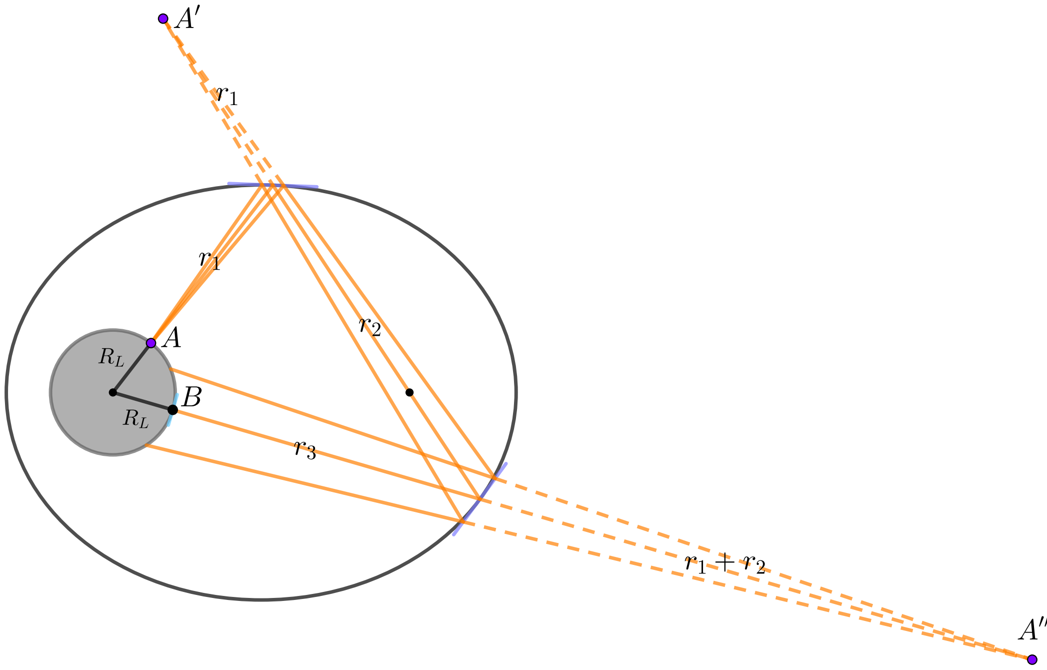
$$a = \sqrt[3]{\frac{\gamma M_L T^2}{4\pi^2}} = 9750\,\mathrm{km}.$$ **0.2**

След отражение от първото огледало лъчите на фара са насочени така, сякаш идват от образа на фара в огледалото. Тези лъчи след това се отразяват от второто огледало, при което ще се простират така, сякаш идват от образа на този образ. Лъчите съответно създават осветеност върху фотоклетката, съответстваща на източник в зенита на разстояние $r_1 + r_2 + r_3$ от нея. **0.3**

Сега остава да отбележим, че $r_1 + r_2 + r_3 = 4a - 2R_L$. Интензитетът при фотоклетката, която е ориентирана перпендикулярно на лъчите, ще бъде $\frac{P}{4\pi(4a-2R_L)^2}$. Създаваната мощност тогава е

$$P_c = \frac{\eta S P}{16\pi\left(2\sqrt[3]{\frac{\gamma M_L T^2}{4\pi^2}} - R_L\right)^2} = 60\,\mathrm{W}. \qquad \mathbf{0.4}$$

Това надвишава $P_{\lim}$ и лампата $\boxed{\text{ще свети.}}$ **0.1**



Задача 1 е адаптирана от олимпиади, както следва:

1.1. Национална, нац. кръг, 1999, 7 клас
1.2. Национална, обл. кръг, 1992, 9 клас
1.3. Национална, обл. кръг, 1994, 10-11 клас
1.4. Всерусийска, обл. кръг, 2011, 9 клас

Задачи 2 и 3 са съставени от Стефан Иванов.
Изказвам благодарности на Александър Проданов за дискусията по 2.2.