ППМГ „АКАД. НИКОЛА ОБРЕШКОВ“
IV ППМГ БУРГАС CHALLENGE

Състезание по физика, 28 май 2022 г.

Тема за 11-12 клас

Задача 1. Всичко за водата.

Задачата се състои от четири независими части. Движението на водата може да се разглежда като ламинарно течение на невискозен флуид.

1.1. Шамандура.

Цилиндрична шамандура с височина $h = 1\,\mathrm{m}$ и лице на основата $S = 0.4\,\mathrm{m}^2$ плава във вода, при което половината от обема ѝ се намира под водата.

1.1.1. Определете масата M на шамандурата.	**1 т.**

Върху шамандурата се качва момиче с маса $m = 40\,\mathrm{kg}$ (Фиг. 1).

1.1.2. На каква дълбочина x ще потъне допълнително шамандурата?	**1 т.**

1.2. Фонтан на Херон.

На Фиг. 2 е показан фонтан, който носи името на древния изобретател Херон Александрийски. Той е съставен от три резервоара – горен (3), който е открит, и два херметично затворени сферични резервоара (1 и 2), разположени на различна дълбочина под земята. Резервоарите са свързани с три тръби. Параметрите на фонтана са указани на фигурата. Сечението на резервоарите е много по-голямо от сечението на тръбите.

1.2.1. На каква максимална височина h_0 над отвора се издига водната струя?	**2 т.**

1.3. Преливане.

С цилиндричен сифон, показан на Фиг. 3 се прелива вода от голям резервоар А в съд Б. На схемата $h_2 = 3\,\mathrm{m}$ и $h_3 = 4\,\mathrm{m}$.

1.3.1. Намерете наляганията p_1 и p_2 в точка 1 и точка 2.	**1.5 т.**

1.3.2. Намерете скоростта v, с която водата изтича от сифона.	**1 т.**

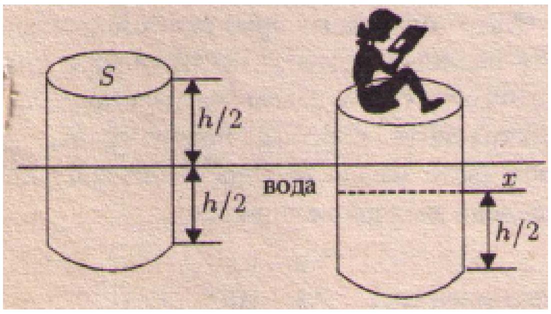
1.3.3. Ако се променя дължината h_3 при постоянна дължина $h_2 = 3\,\mathrm{m}$, каква максимална скорост на водата $v_{\max}$ може да се достигне?	**1 т.**

Указание: Струята се прекъсва, ако в някоя точка налягането стане нула.

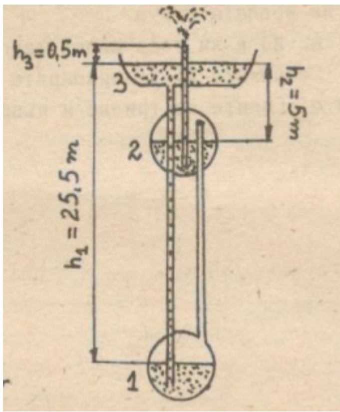
1.4. Счупен кран.

В голяма стая с температура на въздуха $t_0 = 20\,^\circ\mathrm{C}$ има развален кран. От него изтича вода с темп $\mu = 0.1\,\mathrm{g/s}$. Температурата на водата от крана е $t_1 = 54\,^\circ\mathrm{C}$. Водата попада в тънкостенна метална мивка с дълбочина $H = 10\,\mathrm{cm}$ и квадратно сечение със страна $a = 30\,\mathrm{cm}$. Сифонът на мивката е частично запушен, така че мивката да остава изцяло пълна с вода, но да не прелива. Топлинният поток от водата към околната среда е пропорционален на повърхнината ѝ (включително при стените на мивката) и на температурната разлика с околната среда $(t - t_0)$ при коефициент на пропорционалност $k = 0.3\,\mathrm{W/m^2\,°C}$. Считайте мивката за идеален проводник на топлина с пренебрежим топлинен капацитет. Водата в мивката се разбърква.

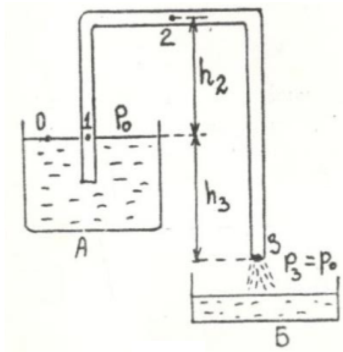
1.4.1. Определете температурата t на водата в мивката, която се установява.	**2.5 т.**



Фигура 1



Фигура 2



Фигура 3

Задача 2. Електрически контури.

Задачата се състои от три независими части.

2.1. Ток и топлина.

Батерия с напрежение $\varepsilon = 12\,\mathrm{V}$ се свързва последователно към незареден кондензатор с капацитет $C = 100\,\mathrm{\mu F}$ и резистор със съпротивление $R = 10\,\mathrm{k\Omega}$.

2.1.1. Намерете каква топлина Q_{tot} се отделя във веригата до достигане на крайното състояние.	**0.5 т.**

2.1.2. Намерете заряда върху кондензатора q в момента, когато във веригата се е отделила топлина $Q = 2\,\mathrm{mJ}$.	**1 т.**

В топлоизолираща кутия с обем $V = 0.03\,\mathrm{m^3}$, пълна с въздух при нормални условия (p_0, $T_0 = 300\,\mathrm{K}$), е поместена електрическа верига. Тя се състои от батерия с напрежение $\varepsilon = 12\,\mathrm{V}$, чиито полюси (при затворен ключ) са свързани със стоманена жица със съпротивление $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$. Температурният коефициент на съпротивлението за тази стомана е $\kappa = 0.003\,\mathrm{K^{-1}}$. Общият топлинен капацитет на жицата е пренебрежим. В началния момент ключът се затваря.

2.1.3. Намерете след какво време τ токът във веригата намалява с $b = 10\%$.	**2.5 т.**

2.2. Магнитна спирачка.

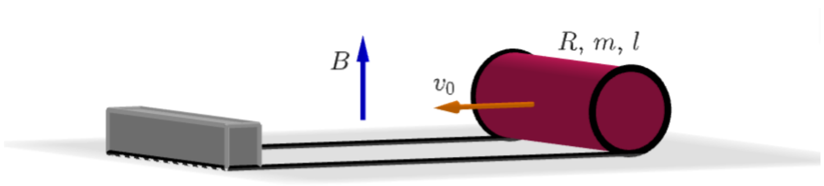
Успоредно на гладка хоризонтална повърхност е разположен гладък еднороден цилиндър със съпротивление R, дължина l и маса m. Около него в двата му края е намотан лек тънък проводник, който минава под цилиндъра и далеч от него е окачен на опора. Системата се намира в магнитно поле B, насочено вертикално нагоре. В началния момент на цилиндъра се придава скорост v_0 към опората, като през цялото време той се търкаля без хлъзгане (Фиг. 4). Магнитните полета, породени от тока в системата, не се отчитат, тоест индуктивността на системата се пренебрегва. Основите на цилиндъра са направени от идеално проводящ материал.

2.2.1. На какво разстояние L от началното си положение ще спре цилиндърът? **3 т.**

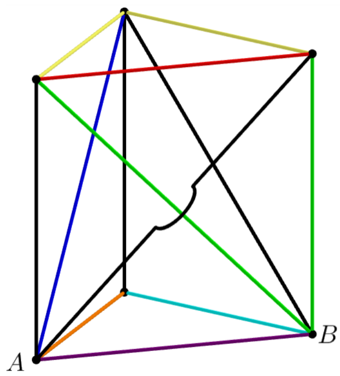
2.2.2. На каква сила на опън T_0 трябва да издържа опората, за да не се отчупи при спирането на цилиндъра? **0.5 т.**

2.3. Обезвреждане.
Този път експериментаторът Гошо наистина се е оплел. Към точки A и B от веригата на Фиг. 5 е свързана батерия с напрежение $U = 12\,\text{V}$. Цветовете на проводниците показват съпротивлението им съгласно Таблица 1.

2.3.1. Намерете тока I през батерията. **2.5 т.**



Фигура 4



Фигура 5

цвят	$R\,[\Omega]$
червено	2
тъмносиньо	4
оранжево	6
черно	12
светлосиньо	18
жълто	24
зелено	36
лилаво	48

Таблица 1

Задача 3. Закони на Кеплер.

Трите закона на Кеплер характеризират движението на телата в гравитационно поле. Те са формулирани в периода 1609-1619 като емпирични закони, тоест зависимости, добре описващи астрономическите наблюдения. През 1687 Нютон показва в свой труд, че тези зависимости следват естествено от неговия закон за гравитацията. В тази задача ще изведем законите на

Кеплер в обобщена форма, след което ще решим някои примери за траекториите на телата под действие на гравитацията. Работете експедитивно 🙂.

3.1. Общи разсъждения. **(2.1 т.)**

В инерциална отправна система разглеждаме две тела с маси M и m и съответно скорости в пространството $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$. Радиус-векторите им са съответно $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$. Двете тела си взаимодействат единствено гравитационно.

3.1.1. Запишете израз за радиус-вектора $\vec{r}_{\text{CM}}$ на центъра на масите (ЦМ) на двете тела в зависимост от $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, M и m. **0.2 т.**

3.1.2. Използвайте, че скоростта се дефинира като промяна на позицията с времето, и запишете израз за скоростта на центъра на масите $\vec{V}_{\text{CM}}$ спрямо $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, M и m. **0.2 т.**

3.1.3. Обяснете защо $\vec{V}_{\text{CM}}$ остава постоянна с времето. **0.2 т.**

Сега преминаваме в отправна система, в която ЦМ е неподвижен.

3.1.4. Намерете тогава общия импулс $\vec{p}$ на двете тела. Ще влияе ли върху ускорението на телата в новата отправна система друго, освен гравитационните сили? **0.2 т.**

3.1.5. Покажете, че траекторията на m относно M е еднаква по форма с траекторията на m относно ЦМ, но е $\frac{M+m}{M}$ пъти по-голяма по размер. **0.3 т.**

3.1.6. Покажете, че действието на M върху m може да се замени еквивалентно (т.е. запазвайки траекторията на m) с това на неподвижна маса M', разположена в ЦМ. Изразете M' в зависимост от M и m. **0.4 т.**

Занапред ще разглеждаме траекторията на m относно ЦМ. Нека в отправната система, свързана с ЦМ, v е скоростта на тялото m, а r е разстоянието му до ЦМ, като радиус-векторът от ЦМ $\vec{r}$ и векторът на скоростта $\vec{v}$ сключват ъгъл α.

3.1.7. Обяснете защо величината $E \equiv \frac{mv^2}{2} - \frac{\gamma M' m}{r}$ се запазва. **0.3 т.**

3.1.8. Обяснете защо величината $L \equiv mvr \sin\alpha$ се запазва. Обяснете защо траекторията на m лежи във фиксирана равнина. **0.3 т.**

3.2. Първи закон. **(2.7 т.)**

Скоростта v на m има лъчева компонента $v_\parallel$ и тангенциална компонента $v_\perp$.

3.2.1. Запишете израз за E в зависимост от $v_\parallel$, L, r, M' и m. Покажете, че по траектория с фиксирани E и L единствените *позволени* разстояния до ЦМ са решенията на системата $f \equiv \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\gamma M' m}{r} - E \leq 0$, $r > 0$. **0.3 т.**

3.2.2. Начертайте качествена графика на f от $\frac{1}{r}$ за фиксирана стойност на L и няколко различни стойности на E. Обяснете внимателно защо по пълната траектория всички позволени в 3.2.1. разстояния до ЦМ действително се срещат. **0.5 т.**

3.2.3. Покажете, че при $E > 0$ траекторията е отворена крива, а при $E < 0$ е затворена крива (независимо от L). **0.2 т.**

3.2.4. Покажете, че за всяка траектория съществува момент, в който m е на някакво разстояние r_0 от ЦМ, а тангенциалната скорост на m в този момент се оказва равна на $\sqrt{\frac{\gamma M'}{r_0}}$. **0.3 т.**

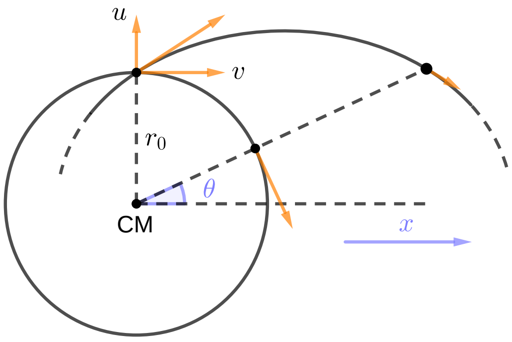
3.2.5. Покажете, че траекторията на m може като частен случай да бъде кръгова. Покажете, че ако радиусът ѝ е R, то скоростта на движение по нея трябва да бъде $\sqrt{\frac{\gamma M'}{R}}$. **0.3 т.**

Нека m се движи по случайно избрана траектория. Избираме момент от движението на m, в който разстоянието до ЦМ е r_0, а тангенциалната скорост е $v = \sqrt{\frac{\gamma M'}{r_0}}$. Означаваме лъчевата скорост в този момент с u. Знаем, че е възможно около ЦМ m да има кръгова траектория с радиус r_0, и скоростта по нея ще е $v = \sqrt{\frac{\gamma M'}{r_0}}$. Така двете траектории се характеризират с едно и също L. Сега дефинираме посоката по тангенциалната скорост като x и от нея отчитаме обратно на часовниковата стрелка ъгъл θ, както е показано на Фиг. 6. Разглеждаме движението по случайната и по кръговата траектория.

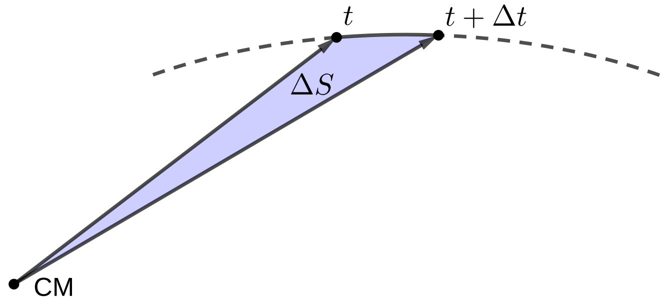
3.2.6. Покажете, че по двете траектории при преместване от $\theta = \pi/2$ до произволно θ векторът на импулса на m се изменя еднакво. **0.7 т.**

3.2.7. Така изведете, че в общия случай траекторията на m около ЦМ е конично сечение, чийто фокус съвпада с ЦМ. **0.4 т.**

Съгласно **3.1.5.**, траекторията на m относно M също ще бъде конично сечение. Това е първият закон на Кеплер.



Фигура 6



Фигура 7

3.3. Втори закон. **(0.4 т.)**

Проследявайки траекторията на m относно ЦМ, за време Δt радиус-векторът се променя и обира определена площ ΔS (Фиг. 7). Величината $\sigma \equiv \frac{\Delta S}{\Delta t}$ се нарича секторна скорост и показва обраната площ за единица време.

> **3.3.1.** Разгледайте преместването по траекторията за малък интервал от време и така покажете, че моментната секторна скорост $\sigma|_{\Delta t \to 0}$ е еднаква по цялата траектория. **0.4 т.**

Отново от **3.1.5.**, това ще важи и за траекторията на m, отчитано спрямо M. Достигаме втория закон на Кеплер – за равни интервали от време отсечката между M и m обира по относителната траектория равни площи.

3.4. Трети закон. **(1.2 т.)**

Да се ограничим до случая, в който траекторията около ЦМ е елиптична, при което нейната голяма полуос е a', а времето за пълна обиколка по траекторията е T.

> **3.4.1.** Покажете, че $\frac{a'^3}{T^2} = \frac{\gamma M'}{4\pi^2}$. **1 т.**

> **3.4.2.** Така покажете, че ако траекторията на m относно M има голяма полуос a, е изпълнено $\frac{a^3}{T^2} = \frac{\gamma(M+m)}{4\pi^2}$. **0.2 т.**

Последната зависимост е третият закон на Кеплер.

3.5. Падане към Слънцето. **(1.5 т.)**

Земната орбита е приблизително кръгова и радиусът ѝ е $r_E = 1\,\mathrm{AU}$ по дефиниция. Да си представим, че движението на Земята по орбитата ѝ около Слънцето внезапно спира, при което тя започва да пада към Слънцето с нулева начална скорост.

> **3.5.1.** Оценете след какво време τ_1 Земята ще достигне Слънцето. **0.8 т.**

> **3.5.2.** Оценете след какво време τ_2 Земята ще бъде на $0.5\,\mathrm{AU}$ от Слънцето. **0.7 т.**

3.6. Абсурдно захранване на лампа. **(2.1 т.)**

> **3.6.1.** Намерете интензитета I_0 на слънчевата светлина (във $\mathrm{W/m^2}$) върху перпендикулярна на слънчевите лъчи повърхност, разположена на $r_E = 1\,\mathrm{AU}$ от Слънцето. **0.5 т.**

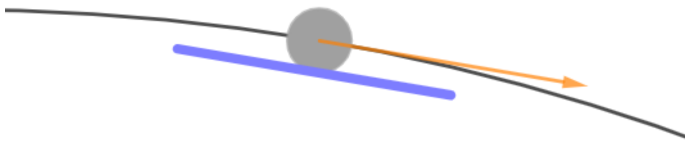
По обща елиптична траектория с период $T = 1\,\mathrm{d}$ около Луната са пуснати два спътника, върху които са монтирани плоски огледала с площ $S_m = 1\,\mathrm{km}^2$, които са постоянно ориентирани перпендикулярно на направлението на движение (Фиг. 8). На място A по лунната повърхност е монтиран точков междупланетен фар с мощност $P = 1.2 \times 10^{15}\,\mathrm{W}$, който излъчва изотропно, тоест еднакво силно във всички направления. В някакъв момент калибровъчен лазерен лъч се насочва от точка A към зенита (направлението право нагоре по небето за дадено място). Той попада върху огледалото на единия спътник, откъдето се отразява и попада върху огледалото на другия спътник.

3.6.2. Покажете, че след второто отражение лъчът се пренасочва към друга точка от лунната повърхност. Изведете геометричните свойства, които използвате.	**0.6 т.**

В тази друга точка B е разположена хоризонтално фотоволтаична клетка с площ $S = 8000\,\mathrm{m}^2$ и ефективност $\eta = 10\%$ спрямо спектъра на източника. Тя е свързана към лампа, която свети само при подадена мощност над $P_{\mathrm{lim}} = 25\,\mathrm{W}$.

3.6.3. Ще свети ли лампата в разглеждания момент?	**1 т.**

Разположението на елементите е такова, че слънчевата и земната светлина не влияят. Интензитетът върху фотоклетката поради звездното небе е пренебрежим.



Фигура 8

Справочни данни:

Земно ускорение – $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$

Атмосферно налягане – $p_0 = 10^5\,\mathrm{Pa}$

Плътност на водата – $\rho_0 = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$

Специфичен топлинен капацитет на водата – $c_0 = 4200\,\mathrm{J/kg\,K}$

Гравитационна константа – $\gamma = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$

Константа на Стефан-Болцман – $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$

Астрономическа единица – $1\,\mathrm{AU} = 1.50 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$

Ефективна температура на Слънцето – $T_\odot = 5770\,\mathrm{K}$

Маса на Слънцето – $M_\odot = 1.99 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$

Радиус на Слънцето – $R_\odot = 696\,000\,\mathrm{km}$

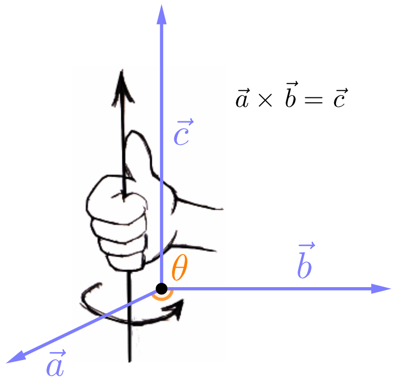
Маса на Луната – $M_L = 7.34 \times 10^{22}\,\mathrm{kg}$

Радиус на Луната – $R_L = 1738\,\mathrm{km}$

Полезна математика:

1. Под радиус-вектор на тяло се разбира вектор, започващ от координатното начало и завършващ в тялото. Той описва позицията на тялото в избраната координатна система.

2. Векторното произведение „$\times$“ е операция, която за избрани два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, сключващи ъгъл $\theta < \pi$ помежду си, дава като резултат вектор $\vec{c}$, имащ големина $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ и посока, определена по правилото на дясната ръка. Съгласно правилото (Фиг. 9), ако дясната ръка се ориентира така, че дланта да „загребва“ от $\vec{a}$ към $\vec{b}$ по ъгъла θ, векторът $\vec{c}$ ще сочи по посока на изправения палец. Съответно той е перпендикулярен на равнината на $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



Фигура 9

3. Коничните сечения са категорията криви, които се получават при пресичане на равнина с прав кръгов конус (Фиг. 10). В полярни координати (r, θ) (тоест описвайки позицията с разстояние от нулата и ъгъл спрямо избрано направление x) коничните сечения се характеризират от уравнението

$$r(\theta) = \frac{l}{1 - e\cos\theta},$$

ако направлението x е избрано по оста на симетрия, както е показано на Фиг. 11, а $r = 0$ е избрано да съвпада с *фокус* на коничното сечение. Фокусът е точка със специални геометрични свойства, върху които няма нужда да се спираме подробно – споменаваме единствено, че елипсата и хиперболата имат по два фокуса, а параболата по един. В уравнението $l \equiv r(\frac{\pi}{2})$, а параметърът e се нарича ексцентрицитет. При $e = 0$, $e \in (0, 1)$, $e = 1$, $e > 1$ имаме съответно окръжност, елипса, парабола и хипербола.

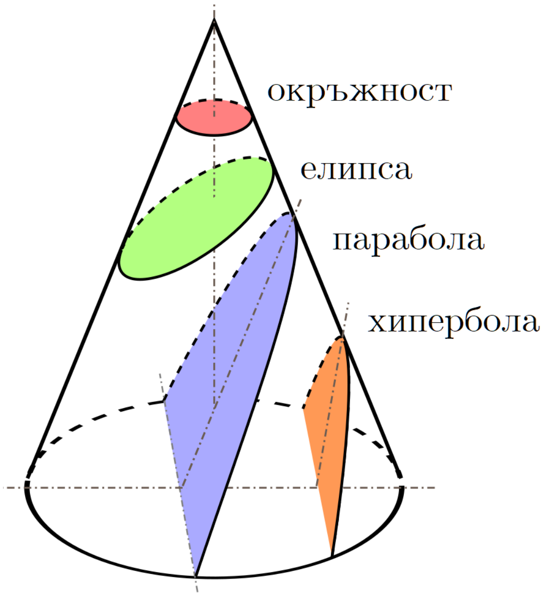
4. За всяка точка от дадена елипса (Фиг. 12) сборът от разстоянията до двата ѝ фокуса е един и същ. Центърът на елипсата е по средата между двата фокуса. Разстоянието между център и фокус се нарича фокусно разстояние f. Най-дългата хорда през него се нарича голяма ос, а най-късата се нарича малка ос. Удобно е елипсата да се характеризира с половините им – голямата си полуос a и малката си полуос b. Площта на елипса тогава е $S = \pi ab$. От уравнението на конично сечение може да се покаже, че $f = ea$, където e е ексцентрицитетът на елипсата.

Полезна физика:

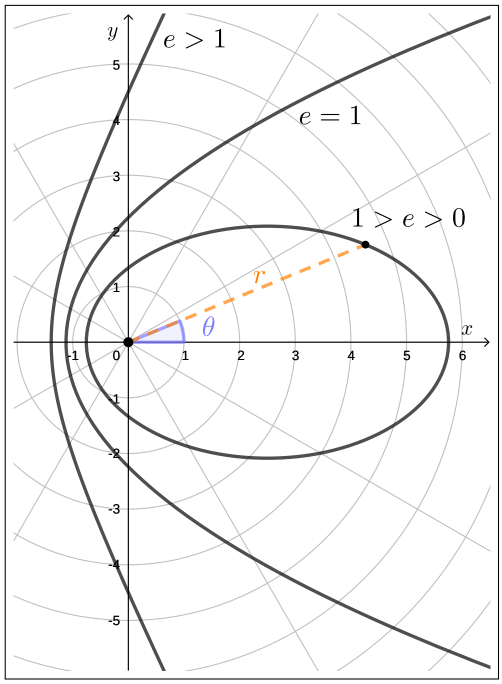
1. Инерциална отправна система (ОС) е такава, в която важи първият принцип на механиката. В такива ОС вторият принцип на механиката има формата $m\vec{a} = \vec{F}$, където $\vec{F}$ е резултантната сила от всички физични взаимодействия (напр. гравитация). ОС, която е неподвижна или се движи с постоянна скорост спрямо инерциална ОС, също е инерциална. В неинерциални отправни системи $\vec{F}$ включва приноса не само на физични взаимодействия, а и на ефекти, произтичащи от ускорението относно инерциална отправна система.

2. Моментът на импулса относно координатното начало за тяло с радиус-вектор $\vec{r}$ и импулс $\vec{p}$ е вектор, който се задава с $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

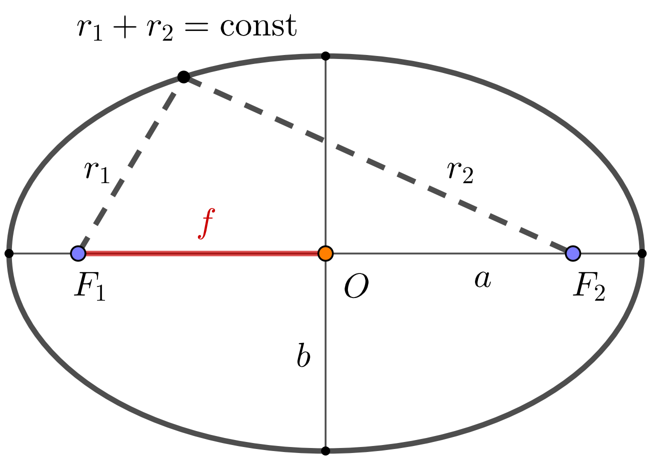
Време за работа – 4 часа.
Успех!



Фигура 10



Фигура 11



Фигура 12